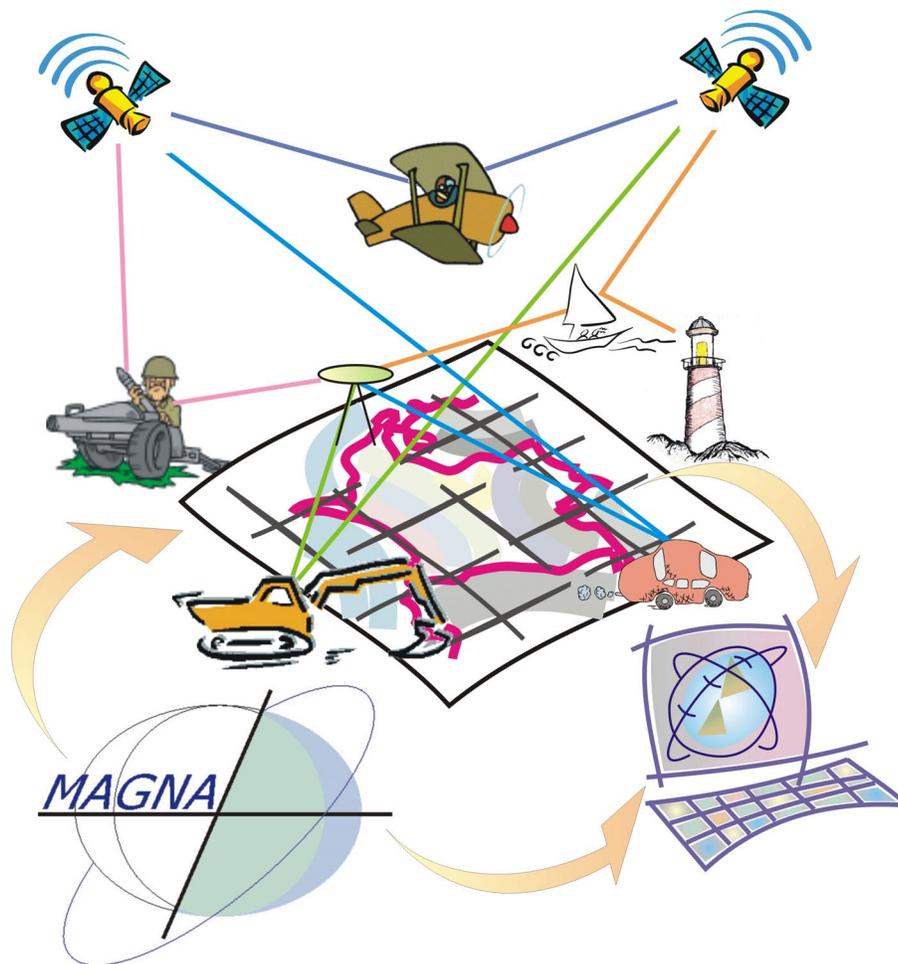


**ASPECTOS PRÁCTICOS DE LA ADOPCIÓN DEL
MARCO GEOCÉNTRICO NACIONAL DE REFERENCIA
MAGNA-SIRGAS
COMO DATUM OFICIAL DE COLOMBIA**



REPÚBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADÍSTICA -DANE-



INSTITUTO GEOGRÁFICO AGUSTÍN CODAZZI
SUBDIRECCIÓN DE GEOGRAFÍA Y CARTOGRAFÍA
DIVISIÓN DE GEODESIA

BOGOTÁ, D.C., OCTUBRE DE 2004

INSTITUTO GEOGRÁFICO AGUSTÍN CODAZZI

IVÁN DARÍO GÓMEZ GUZMÁN
Director General

OSCAR MAURICIO LIZCANO ARANGO
Secretario General

MANUEL GUILLERMO BELTRÁN QUECAN
Subdirector de Geografía y Cartografía (C)

NAPOLEÓN ORDOÑEZ
Subdirector de Agrología

GABRIEL MARTÍNEZ PELÁEZ
Subdirector de Catastro

Bogotá, D.C., octubre de 2004

ASPECTOS PRÁCTICOS DE LA ADOPCIÓN DEL MARCO GEOCÉNTRICO NACIONAL DE REFERENCIA *MAGNA-SIRGAS* COMO DATUM OFICIAL DE COLOMBIA

Este trabajo fue realizado en la División de Geodesia de la Subdirección de Geografía y Cartografía del Instituto Geográfico Agustín Codazzi por la ingeniera Laura Sánchez Rodríguez.



© Instituto Geográfico Agustín Codazzi – 2004

Prohibida la reproducción total o parcial sin la autorización previa del Instituto Geográfico Agustín Codazzi.

CONTENIDO

1. Por qué introducir un nuevo datum?	3
1.1 Geodesia Nacional	3
1.2 Proyecto SIRGAS	4
1.3 Fuerzas Armadas y organismos de seguridad	4
1.4 Aviación civil y navegación marítima y fluvial	4
1.5 Infraestructura Colombiana de Datos Espaciales -ICDE-	5
1.6 Usuarios <i>no expertos</i> de la información georreferenciada	5
2 Sistemas de referencia geodésicos	6
2.1 Sistemas de referencia tridimensionales y datum geodésicos	6
2.2 Sistema internacional de referencia terrestre	7
2.3 Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas: SIRGAS	9
2.4 Nuevo sistema tridimensional de referencia para Colombia: MAGNA (Marco Geocéntrico Nacional de Referencia)	12
2.5 Antiguo datum geodésico horizontal en Colombia: Datum BOGOTÁ	14
2.6 Modelo geoidal para Colombia: GEOCOL2004	15
3 <i>MAGNA-SIRGAS</i> vs. Datum BOGOTÁ	17
3.1 Deformación del Datum BOGOTÁ y su red geodésica ARENA	17
3.2 Vinculación del Datum BOGOTÁ a <i>MAGNA-SIRGAS</i>	20
3.3 Diferencias entre el Datum BOGOTÁ y <i>MAGNA-SIRGAS</i>	20
4 Tipos de coordenadas manejados en Colombia	22
4.1 Coordenadas cartesianas tridimensionales	22
4.2 Coordenadas elipsoidales	23
4.3 Coordenadas planas	23
4.3.1 Proyección cartográfica Gauss-Krüger	24
4.3.2 Proyección cartesiana	26
5. Conversión de coordenadas	27
5.1 Constantes del Elipsoide Internacional o de Hayford	27
5.2 Constantes del Elipsoide GRS80 (Geodetic Reference System, 1980)	27
5.3 Conversión entre coordenadas cartesianas tridimensionales [X, Y, Z] y elipsoidales [φ , λ , h]	28
5.4 Conversión entre coordenadas elipsoidales [φ , λ , h] y planas de Gauss- Krüger [N, E]	29

5.5 Conversión entre coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$ y planas cartesianas $[N, E]$	32
6. Transformación de coordenadas	33
6.1 Modelo de transformación tridimensional de similitud	34
6.2 Modelo Molodensky-Badekas	37
6.3 Transformación bidimensional afín	39
6.4 Transformación bidimensional a partir de coordenadas elipsoidales	41
7. Adopción de <i>MAGNA-SIRGAS</i> como sistema de referencia oficial para Colombia	43
7.1 Generación de información oficial georreferenciada en <i>MAGNA-SIRGAS</i>	43
7.2 Migración a <i>MAGNA-SIRGAS</i> de la información espacial en formato digital referenciada en Datum BOGOTÁ	44
7.3 Tratamiento de la cartografía impresa referida al Datum BOGOTÁ	46
7.3.1 Manejo de coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda]$ sobre cartografía impresa	47
7.3.2 Manejo de coordenadas planas $[N, E]$ Gauss-Krüger o Cartesianas sobre cartografía impresa	48
8. <i>MAGNA-SIRGAS</i> en su entidad	49
Conclusiones	53
Bibliografía	54
Anexo I: Conversión de coordenadas	57
Anexo II: Transformación de coordenadas	67
Anexo III: Obtención de alturas sobre el nivel medio del mar a partir de información GPS	79
Anexo IV: Procesamiento de información GPS considerando la variación de las coordenadas en el tiempo (velocidades) por efectos geodinámicos	91

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Datum geodésicos horizontales $[\varphi, \lambda]$, $[H]$ y tridimensionales $[\varphi, \lambda, h]$, $[H]$	7
Figura 2.2 ITRF2000 y sus velocidades	9
Figura 2.3 SIRGAS: Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas	10
Figura 2.4 Modelo de velocidades para América del Sur	11
Figura 2.5 Sistema MAGNA-SIRGAS : Red básica GPS y estaciones de funcionamiento continuo	13
Figura 2.6 ARENA: Arco de triangulación Bogotá - Bucaramanga – Cúcuta	15
Figura 2.7 Modelo geoidal (cuasi-geoidal) para Colombia (GEOCOL2004)	16
Figura 3.1 Distorsiones de la red ARENA con respecto a MAGNA-SIRGAS	18
Figura 4.1 Coordenadas cartesianas tridimensionales $[X, Y, Z]$ y elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$	22
Figura 4.2 Sistema de proyección cartográfica Gauss-Krüger	24
Figura 4.3 Proyección cartesiana	26
Figura 5.1. Coordenadas planas de Gauss-Krüger $[N, E]$ y elipsoidales $[\varphi, \lambda]$	29
Figura 6.1 Transformación tridimensional de siete parámetros	35
Figura 6.2 Regionalización de los parámetros de transformación en Colombia según el índice de planchas del IGAC	36
Figura 6.3 Transformación bidimensional	40
Figura 6.4 Transformación afin de seis parámetros	41
Figura 7.1 Vectores de discrepancia entre las coordenadas cartesianas extraídas de la cartografía y sus equivalentes determinadas en terreno, tanto para la información original en Datum BOGOTÁ, como para su equivalente migrada a MAGNA-SIRGAS mediante los parámetros de transformación del IGAC	46
Figura 7.2 Representación gráfica de las discrepancias entre las coordenadas planas (N,E) calculadas con los parámetros del Datum BOGOTÁ y sus equivalentes calculadas sobre MAGNA-SIRGAS	49

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Diferencias entre el Datum BOGOTÁ y MAGNA-SIRGAS	21
Tabla 4.1 Coordenadas MAGNA-SIRGAS de los orígenes de las zonas de proyección Gauss-Krüger en Colombia	25
Tabla 4.2 Coordenadas en Datum BOGOTÁ de los orígenes de las zonas de proyección Gauss-Krüger en Colombia	25
Tabla 5.1. Constantes del elipsoide Internacional o de Hayford	27
Tabla 5.2 Constantes del elipsoide GRS80	28
Tabla 6.1 Parámetros regionales de transformación, según el método de Helmert, para migrar información georreferenciada en Datum BOGOTÁ al sistema MAGNA-SIRGAS	37
Tabla 6.2 Parámetros regionales de transformación, según el modelo Molodensky-Badekas, para migrar información georreferenciada en Datum BOGOTÁ al sistema MAGNA-SIRGAS	38
Tabla 6.3 Parámetros regionales de transformación, utilizando coordenadas elipsoidales, para migrar información georreferenciada en Datum BOGOTÁ al sistema MAGNA-SIRGAS	43
Tabla 7.1 Comparación de los indicadores estadísticos obtenidos de las pruebas de exactitud para las coordenadas cartesianas y elipsoidales referidas a Datum BOGOTÁ y sus equivalentes transformadas a MAGNA-SIRGAS	45
Tabla 7.2 Efecto, en diferentes escalas, de los 500 m de discrepancia entre el Datum BOGOTÁ y MAGNA-SIRGAS	47
Tabla 7.3 Efecto, en diferentes escalas, de las máximas discrepancias geométricas entre coordenadas planas calculadas sobre Datum BOGOTÁ y MAGNA-SIRGAS	48

ABREVIATURAS

ARENA	Antigua Red Nacional
CAP	Central Andes GPS Project
CASA	Central and South America GPS Project
CIO	Coventional International Origin
DGFI	Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut
DIGSA	Directorio de Directores de los Institutos Geográficos de América del Sur, España y Portugal
FAGS	Federation of Astronomical and Geophysical Services
GEOCOL	Modelo Geoidal para Colombia
GNSS	Global Navigation Satellite Systems
GPS	Global Positioning System
GRS80	Geodetic Reference System 1980
IAG	International Association of Geodesy
IAU	International Astronomical Union
ICDE	Infraestructura Colombiana de Datos Espaciales
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
IGAC	Instituto Geográfico Agustín Codazzi
IGS	International GPS Service
IGS-RNAAC-SIR	Regional Network Associate Analysis Center – SIRGAS
IHO	International Hydrographic Organization
ILS	International Latitude Service
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
ITRS	International Terrestrial Reference System
IUGG	International Union of Geodesy and Geophysics
MAGNA	Marco Geocéntrico Nacional de Referencia
OACI	Organización de Aviación Civil Internacional
SAGA	South America Geodynamics Project
SIRGAS	Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas
SNAPP	South America – Nazca Plate Motion Project
WGS84	World Geodetic System 1984

PRESENTACIÓN

El acelerado desarrollo de la tecnología de la información permite en la actualidad la administración digital de extensos bancos de datos, entre los que se destaca la información espacial, cuyos almacenamiento, consulta, administración y presentación son una parte esencial de la *revolución informática* que se adelanta en el ámbito global.

Hoy por hoy, los diferentes bancos de datos utilizados en la planeación y desarrollo de las actividades humanas requieren de su ubicación espacial, la cual está dada simplemente por la localización geográfica de los ítem considerados en los conjuntos de datos específicos. Dicha localización se expresa mediante coordenadas geográficas (latitud, longitud) o planas (norte, este), las cuales son la base de todos los sistemas de información geográfica. De allí, los profesionales involucrados en la captura, uso y administración de este tipo de información deben necesariamente estar al tanto de la plataforma de georreferenciación que soporta la definición espacial de sus datos.

En este sentido, el Instituto Geográfico Agustín Codazzi -IGAC-, como entidad gubernamental encargada de los sistemas de referencia nacionales, se preocupa por hacer partícipes a sus usuarios del proceso de apropiación, modernización y aprovechamiento de los avances científicos y técnicos relacionados con la generación de datos espaciales de alta calidad, que en Colombia se concretan a través de la adopción de **MAGNA-SIRGAS** (Marco Geocéntrico Nacional de Referencia, densificación en Colombia del Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas) como sistema de referencia oficial en el país en reemplazo del Datum BOGOTÁ. **MAGNA-SIRGAS** garantiza la compatibilidad de las coordenadas *colombianas* con las técnicas espaciales de posicionamiento, como lo son los sistemas GNSS (Global Navigation Satellite Systems) y con conjuntos transnacionales de datos georreferenciados.

En la práctica, la consecuencia más relevante de la introducción de **MAGNA-SIRGAS** en reemplazo del datum clásico BOGOTÁ está asociada al cambio de las coordenadas de un mismo punto en aproximadamente 500 m en dirección suroeste; lo cual necesariamente, afecta a todos los productores y usuarios de la información geográfica en el país. Así, teniendo presente la extensa gama de individuos y organizaciones que se ven afectados por la adopción del nuevo sistema de referencia, el IGAC, mediante el presente documento, describe los aspectos técnicos necesarios para la utilización práctica de **MAGNA-SIRGAS** y proporciona las herramientas requeridas para que la información que aún se encuentra definida sobre el Datum BOGOTÁ sea actualizada mediante su vinculación al nuevo sistema.

1. POR QUÉ INTRODUCIR UN NUEVO DATUM?

Las tendencias modernas de globalización y la consecuente eliminación de fronteras en la generación y aprovechamiento de los datos espaciales, obligan la participación activa de Colombia en la apropiación y utilización de tecnologías de vanguardia en temas de georreferenciación. En la actualidad, tanto el sector público, como el privado, utilizan intensivamente la tecnología GPS (Global Positioning System), que se basa, por las coordenadas de los satélites, en un sistema de referencia geocéntrico. La incompatibilidad del Datum BOGOTÁ con esta tecnología hace evidente la necesidad de introducir un sistema de referencia geocéntrico en Colombia, de aceptación a nivel internacional y que garantice mantener las altas precisiones ofrecidas por esta tecnología en la determinación de coordenadas. Dentro de este marco, los principales argumentos que conducen a la adopción del datum geocéntrico **MAGNA-SIRGAS** como sistema de referencia oficial de Colombia se resumen en:

1.1 Geodesia Nacional

El IGAC es la entidad gubernamental encargada de determinar, administrar y proporcionar los sistemas de referencia geodésicos nacionales. Esta actividad exige su interacción cotidiana con otras entidades gubernamentales y organizaciones del sector privado generadores y consumidores de información georreferenciada, así como también un alto grado de cooperación con diversos organismos internacionales que definen el avance técnico científico en la determinación de coordenadas a nivel global. Un ejemplo es su participación en la red de estaciones GPS de funcionamiento continuo de SIRGAS mediante las estaciones permanentes actualmente instaladas en el país. Dicha red es procesada semanalmente por el Centro Asociado de Análisis de la Red Regional SIRGAS del Servicio GPS Internacional (IGS-RNAAC-SIR), el cual se apoya en el Sistema Internacional de Referencia Terrestre (ITRS), al que también se refieren las coordenadas de los satélites GNSS.

De hecho, la ocurrencia de inconsistencias entre los levantamientos modernos de los usuarios del IGAC y la información geodésica clásica (referida al Datum BOGOTÁ) suministrada por este Instituto, se ha elevado considerablemente, debido a la obsolescencia del Datum BOGOTÁ frente al posicionamiento GPS. Este datum presenta precisiones inferiores a las ofrecidas por las técnicas satelitales y el esfuerzo invertido en las labores de campo y oficina para obtener coordenadas GPS de alta calidad se pierde al transformar la información levantada al antiguo datum. Dicha situación se traduce en traumatismos de diversa índole (técnicos, económicos, etc.) para los usuarios de la información georreferenciada en el país, los cuales son insalvables sin la introducción de un datum compatible con las nuevas tecnologías; que en Colombia corresponde con **MAGNA-SIRGAS**.



1.2 Proyecto SIRGAS

En el ámbito regional, tanto el Directorio de Directores de los Institutos Geográficos de América del Sur, España y Portugal (DIGSA) (Brasilia, 1998), como la Organización de las Naciones Unidas (ONU) a través de su VII Conferencia de Cartografía para las Américas (Nueva York, 2001) han recomendado la adopción de SIRGAS (Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas) como el sistema de referencia unificado y oficial para el continente americano. En este sentido, ya existen redes nacionales de densificación en todos los países de América del Sur y en Centro América se avanza por el mismo camino. Además, en países como Argentina, Ecuador, Paraguay, Perú, Uruguay y Venezuela se han emitido las resoluciones oficiales pertinentes para reemplazar los datum locales antiguos por las densificaciones correspondientes de SIRGAS.

La utilización de SIRGAS como plataforma de referencia en la región ha facilitado, por ejemplo, la demarcación de fronteras internacionales y la expansión de compañías transnacionales que requieren de un sistema coordinado unificado para el desempeño de sus labores. Colombia no ha sido ajena a este proceso y la operabilidad de su participación en proyectos de desarrollo sostenible en la región requiere que sus datos espaciales sean compatibles internacionalmente y que sus avances en materia de georreferenciación sean acordes con los estándares que se promueven a nivel mundial.

1.3 Fuerzas Armadas y organismos de seguridad

Las operaciones militares, de policía y de control adelantadas en Colombia se basan en convenciones internacionales que demandan un marco de referencia global uniforme, compatible con los sistemas de navegación satelital, como el GPS. Por esto, tácitamente estas fuerzas han adoptado como plataforma de referencia para sus operaciones el sistema WGS84 (World Geodetic System, 1984), equivalente al ITRF2000 (International Terrestrial Reference Frame, 2000), el cual ha sido densificado en América mediante SIRGAS y, en Colombia, mediante *MAGNA-SIRGAS*.

La adopción oficial de un datum geocéntrico en el país proporciona mayor fiabilidad al desarrollo de las operaciones militares y de los organismos de control, facilitando el intercambio de información geoespacial con aquellas organizaciones de carácter multinacional que apoyan técnica y estratégicamente las Fuerzas Armadas colombianas.

1.4 Aviación civil y navegación marítima y fluvial

Las organizaciones internacionales encargadas de establecer las condiciones técnicas y de seguridad necesarias para el transporte de personas y mercancías por vía aérea, fluvial o marítima decidieron, en 1998, la adopción de un datum geocéntrico para la definición de sus especificaciones, ya que la utilización de datum locales en la navegación de aeronaves y embarcaciones conduce a inconsistencias en la georreferenciación de las trayectorias,



comprometiendo la seguridad de las expediciones. Por tal motivo, la Organización de Aviación Civil Internacional -OACI- y la Organización Internacional de Hidrografía (IHO: International Hydrographic Organization) promueven en los diferentes países la adopción de un sistema de referencia unificado a nivel global y compatible con las técnicas de navegación apoyadas en satélites, el cual en Colombia, está representado por **MAGNA-SIRGAS**.

1.5 Infraestructura Colombiana de Datos Espaciales -ICDE-

ICDE se ha definido como *la suma de políticas, estándares, organizaciones y recursos tecnológicos que facilitan la obtención, uso y acceso a la información georreferenciada de cobertura nacional* (<http://codazzi4.igac.gov.co/icde/>). Hoy por hoy, ésta es la iniciativa de mayor importancia para la generación continua de conocimientos sobre los recursos de la nación, convirtiéndose en la herramienta básica para la toma de decisiones relacionadas con el desarrollo económico y social del país.

Dentro de los datos fundamentales de ICDE, como de cualquier infraestructura nacional de datos espaciales, se cuenta la referencia geodésica para la ubicación geográfica de la información temática. Esta georreferenciación debe ser confiable, precisa y compatible tanto con información transnacional, como con la vanguardia tecnológica, necesidad que sólo puede ser satisfecha mediante la adopción de un datum geocéntrico como **MAGNA-SIRGAS**.

1.6 Usuarios *no expertos* de la información georreferenciada

El uso extensivo de las tecnologías de posicionamiento por satélites, especialmente del GPS, ha dejado atrás la convicción tradicional de que sólo los profesionales que se desempeñan en la agrimensura, la cartografía y los sistemas de información geográfica requieren destreza en la captura, manejo y presentación de la información espacial. En la actualidad, la facilidad de manejo y precisión ofrecidos por las tecnologías mencionadas han hecho que la georreferenciación se convierta en una actividad cotidiana de usuarios *no expertos*, quienes implícitamente demandan la utilización de un sistema de referencia compatible con aquellas tecnologías, sin necesidad de conocer detalles de la geodesia, como lo son, por ejemplo, la definición y transformación de datum para encontrar *concordancia* entre las coordenadas GPS y la cartografía oficial del país. En consecuencia, el tamaño y requerimientos de los usuarios *no expertos* del GPS en Colombia orientan fuertemente hacia la adopción de un datum geocéntrico que soporte adecuadamente sus actividades, sin tener que adentrarse en materias técnicas propias de la comunidad geomática.

La adopción de un datum geocéntrico en Colombia es promovida por aquellas organizaciones de ámbito nacional y de cooperación internacional comprometidas con la generación y utilización de datos espaciales, cuyo objetivo central es la compatibilidad entre diferentes



conjuntos de datos y, a su vez, con las técnicas de posicionamiento y navegación por satélites. El beneficio de los usuarios cuyas áreas de acción son menores (locales o regionales) es un tanto más complicado de definir, pues amén la concordancia entre diferentes tipos de información y la compatibilidad con las técnicas modernas de posicionamiento, la migración de sus datos al nuevo datum resulta dispendiosa y de allí, es factible encontrar mayor resistencia al cambio. No obstante, dentro del contexto nacional y la revolución actual en la tecnología de la información, no pueden permanecer como sectores aislados; ya que por facilidad y practicidad el nuevo sistema **MAGNA-SIRGAS** definirá los estándares para la captura, administración y presentación de la información georreferenciada en el país.

2 SISTEMAS DE REFERENCIA GEODÉSICOS

Con el propósito de establecer la relación beneficio-costos de la adopción de **MAGNA-SIRGAS** como sistema de referencia oficial para Colombia en reemplazo del Datum BOGOTÁ, es necesario hacer énfasis en algunos de los aspectos técnicos considerados en la definición de coordenadas, sus tipos y utilización. Dentro de este marco, la presente sección describe las coordenadas manejadas en Colombia y los sistemas de referencia (o datum geodésicos) a que están vinculadas.

2.1 Sistemas de referencia tridimensionales y datum geodésicos

Un *sistema de referencia* es el conjunto de convenciones y conceptos teóricos adecuadamente modelados que definen, en cualquier momento, la orientación, ubicación y escala de tres ejes coordenados $[X, Y, Z]$. Dado que un sistema de referencia es un modelo (una concepción, una idea) éste es materializado (realizado, concretado) mediante puntos reales cuyas coordenadas son determinadas sobre el sistema de referencia dado, dicho conjunto de puntos se denomina *marco de referencia (Reference Frame)* (IERS 2000). Si el origen de coordenadas del sistema $[X=0, Y=0, Z=0]$ coincide con el centro de masas terrestre éste se define como *Sistema Geocéntrico de Referencia* o *Sistema Coordinado Geocéntrico* mientras que, si dicho origen está desplazado del geocentro, se conoce como *Sistema Geodésico Local* (Vanicek and Steeves 1996).

Convencionalmente, las posiciones $[X, Y, Z]$ pueden expresarse en términos de coordenadas curvilíneas latitud (ϕ) y longitud (λ), las cuales requieren de la introducción de un elipsoide de referencia. Para el efecto, el eje Z coincide con el eje menor del elipsoide, el origen de coordenadas $[X=0, Y=0, Z=0]$ con el centro geométrico del elipsoide, el eje X con la intersección del plano ecuatorial y del meridiano de referencia del elipsoide y el eje Y forma un sistema coordinado de mano derecha. La orientación y ubicación del elipsoide asociado a un sistema coordinado $[X, Y, Z]$ se conoce como *Datum Geodésico*; si aquel es geocéntrico se tendrá un *Datum Geodésico Geocéntrico o Global*, si es local se tendrá un *Datum Geodésico Local*. Estos últimos se conocen también como *Datum Horizontales* ya que sus coordenadas (ϕ, λ) se definen independientemente



de la altura (H). Mientras que la latitud (φ) y la longitud (λ) se refieren al elipsoide, la altura (H) se define sobre una superficie de referencia (el nivel medio del mar) que no tiene relación alguna con aquél.

Dado el estado del arte en la época de determinación de las redes geodésicas antiguas (o clásicas), las alturas (H) de los vértices geodésicos eran obtenidas con una precisión diez veces menor que las posiciones horizontales, lo cual indica que no debe combinarse (H) con (φ , λ) para generar posiciones 3-D (Vanicek and Steeves 1996, Torge 2001). Los datum geocéntricos, por el contrario, son tridimensionales, éstos permiten definir las tres coordenadas de un punto con respecto a la misma superficie de referencia (el elipsoide), en este caso la tercera coordenada se conoce como altura geodésica o elipsoidal (h) (figura 2.1).

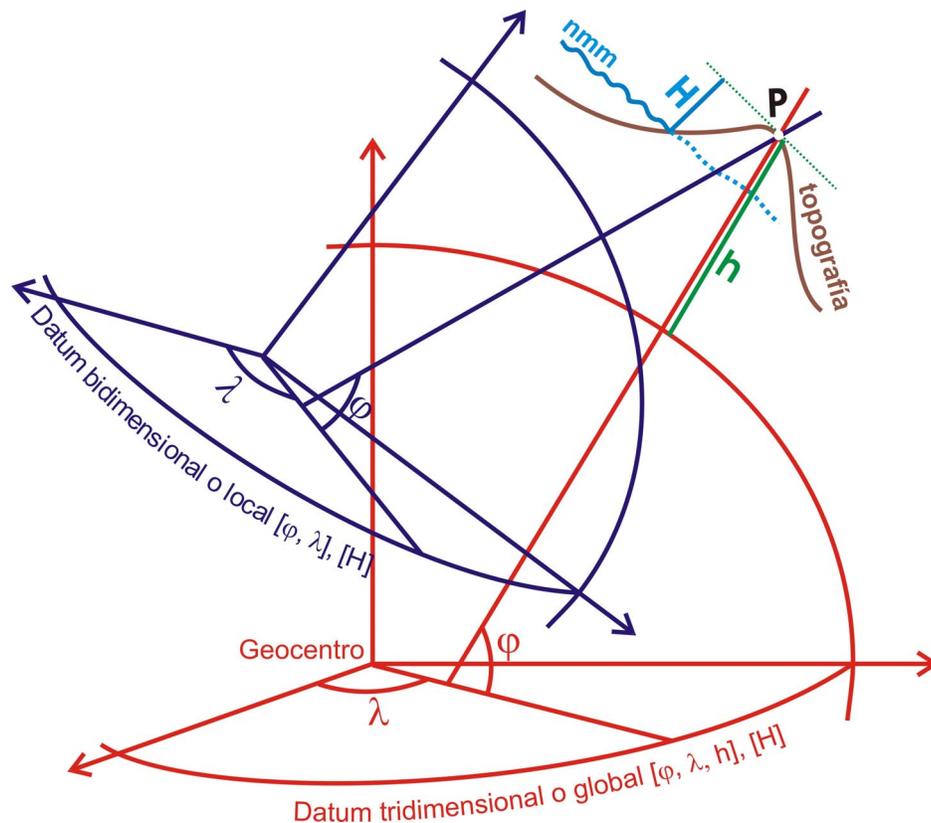


Figura 2.1 Datum geodésicos horizontales $[\varphi, \lambda]$, $[H]$ y tridimensionales $[\varphi, \lambda, h]$, $[H]$

2.2 Sistema internacional de referencia terrestre

El sistema geocéntrico utilizado en Geodesia es un Sistema Convencional de Referencia Terrestre (ITRS: International Terrestrial Reference System), el cual es determinado,

mantenido y proporcionado por el Servicio Internacional de Rotación Terrestre y Sistemas de Referencia (IERS: International Earth Rotation and Reference Systems Service) a través de cooperación multinacional a nivel global, bajo la potestad de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG: International Association of Geodesy) y vínculos estrechos con la Unión Internacional de Astronomía (IAU: International Astronomical Union) y la Federación de Servicios Astronómicos y Geofísicos (FAGS: Federation of Astronomical and Geophysical Services). El ITRS se define con origen en el centro de masas terrestre (incluyendo océanos y atmósfera). Su eje Z coincide con el polo definido por el CIO (Conventional International Origin) para 1903.0, el cual fue adoptado oficialmente en 1967 por la IAU y la IAG. Éste coincide con la dirección media del polo determinada a partir que las mediciones de cinco estaciones del Servicio Internacional de Latitud (ILS: International Latitude Service) durante 1900.0 - 1906.0. El eje X es orientado hacia el meridiano de Greenwich en 1903.0, llamado también Meridiano de Referencia IERS (IERS Reference Meridian) y el eje Y es perpendicular a éstos dos (sistema coordinado de mano derecha). La escala del ITRS es definida en un marco geocéntrico de acuerdo con la teoría relativista de gravitación. Su orientación está forzada a no tener residuales en la rotación global con respecto a la corteza terrestre (IERS 2000, Teunissen and Kleusberg 1998, Kouba and Popelar 1999).

La realización (materialización) del ITRS es el marco ITRF (International Terrestrial Reference Frame), el cual está conformado por las coordenadas cartesianas geocéntricas $[X, Y, Z]$ y las velocidades $[V_x, V_y, V_z]$ de un conjunto de estaciones observadas mediante técnicas geodésicas espaciales de muy alta precisión. Las velocidades son incluidas ya que el movimiento de las placas tectónicas y sus deformaciones también alteran las coordenadas de sus estaciones, pero estos movimientos no afectan las órbitas de los satélites. Esto se traduce en que, para una observación instantánea sobre la superficie de la Tierra las estaciones terrestres divergen del sistema de referencia satelital, obligando que las coordenadas ITRF sean trasladadas en el tiempo de acuerdo con su variación por los efectos de la dinámica terrestre.

Dada la dependencia de las coordenadas geodésicas con respecto al tiempo, el ITRF es complementado indicando la época para la cual las posiciones de sus estaciones son vigentes. Por ejemplo, en el ITRF94 las coordenadas de esta red están definidas para el 1 de enero de 1993. Su traslado a fechas diferentes implica la aplicación de velocidades. El marco de referencia más recientemente calculado es el ITRF2000 (figura 2.2), (IERS 2003). Sus coordenadas se refieren al 1 de enero de 1997 y coincide con la nueva definición del WGS84(G1150) (World Geodetic System 1984, semana GPS No. 1150) introducida a partir del 1 de enero de 2000 (Merrigan et al. 2002).

La principal utilidad del ITRF es que a partir de éste se calculan las efemérides precisas de los satélites GNSS (incluso el GPS), lo que garantiza que cualquier punto sobre la



superficie terrestre que haya sido ligado al ITRF vigente está en el mismo sistema de referencia utilizado por los satélites.

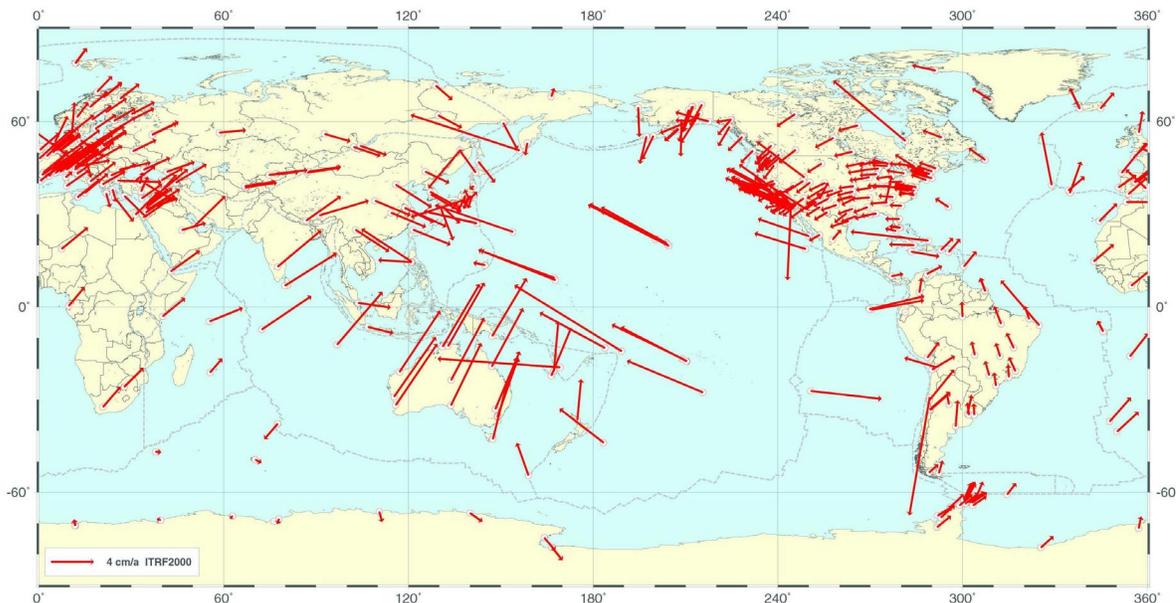


Figura 2.2 ITRF2000 y sus velocidades (proporcionado por DGFI- Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut-)

2.3 Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas: SIRGAS

SIRGAS es la densificación del ITRF en América. Está conformado por una red con más de 180 estaciones geodésicas de alta precisión (algunas de ellas de funcionamiento continuo), cuya distribución ofrece un cubrimiento homogéneo sobre el continente y, por lo tanto, las condiciones necesarias para que las redes nacionales estén vinculadas al ITRF. El datum geodésico correspondiente está definido a partir de los parámetros del elipsoide GRS80 (Geodetic Reference System, 1980), orientado según los ejes coordenados del sistema de referencia SIRGAS, equivalente al ITRF (SIRGAS 1997).

En la primera campaña GPS-SIRGAS, adelantada en mayo de 1995, se establecieron 58 estaciones en el área de América del Sur, cuyas coordenadas corresponden con el ITRF94, época 1995.4 (SIRGAS 1997). En mayo de 2000 se realizó una segunda campaña en la que se incluyeron, además de las estaciones de 1995, los mareógrafos que definen los sistemas de alturas en los países de América del Sur y nuevos puntos ubicados en América Central, Estados Unidos y Canadá (Luz et al. 2001, SIRGAS 2002). El resultado de esta nueva campaña es una red homogéneamente distribuida sobre el continente, conformada por 184 estaciones, cuyas coordenadas están calculadas en el ITRF2000, época 2000.4 (figura 2.3) (Drewes et al. 2003).

El mantenimiento de SIRGAS incluye, además de la preservación física de los monumentos, la determinación del cambio de las coordenadas a través del tiempo

(velocidades). Esto garantiza la consistencia entre el sistema terrestre SIRGAS y el sistema de referencia satelital. Las velocidades correspondientes se determinan a partir de mediciones geodésicas repetitivas (Drewes 1998), dentro de las que se considera la red de estaciones GPS de funcionamiento continuo (o estaciones permanentes) y la ocupación periódica de las estaciones (pasivas) SIRGAS.

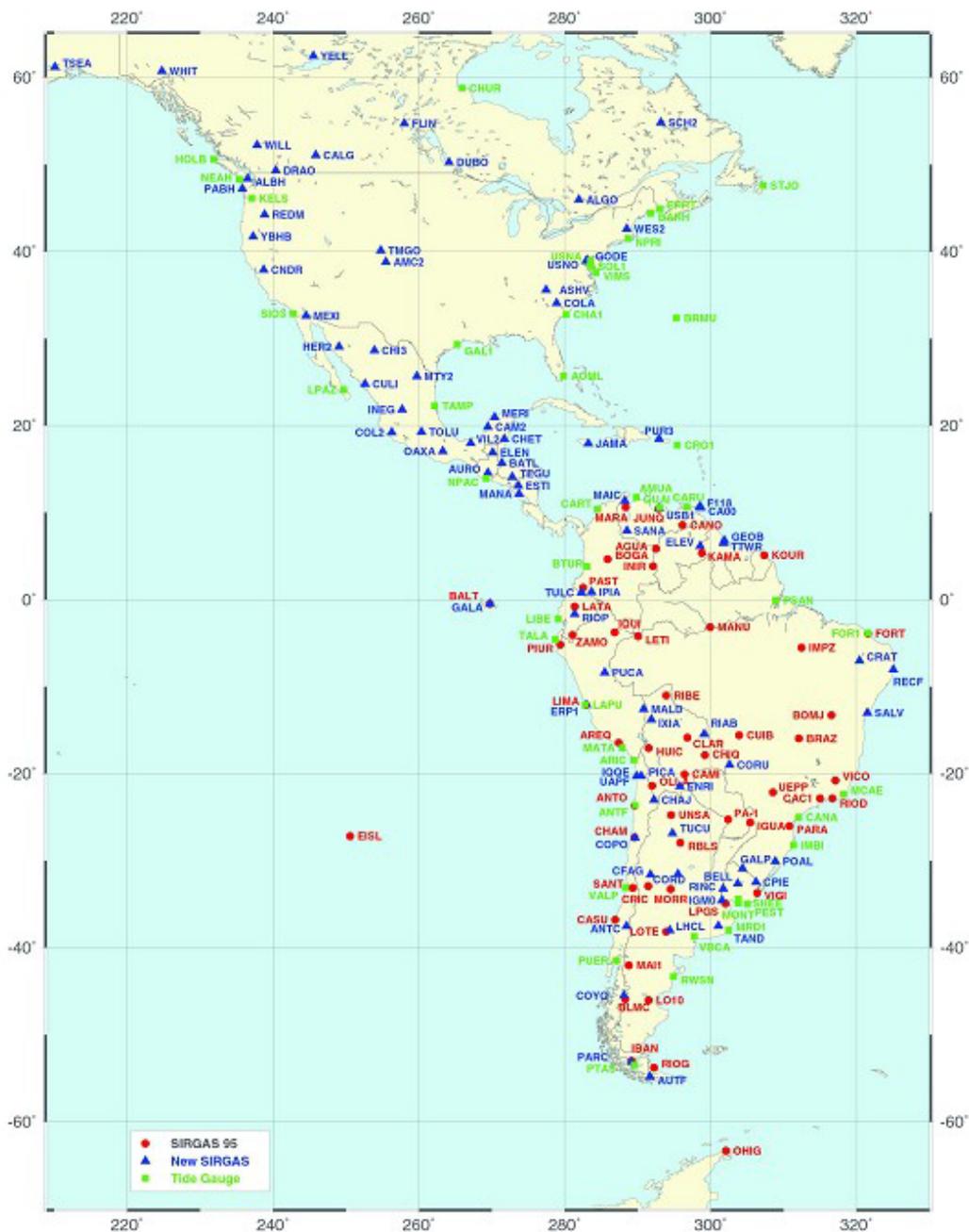


Figura 2.3 SIRGAS: Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas



La red GPS permanente está compuesta por más de 40 puntos de rastreo continuo en el continente suramericano, cuya información es procesada semanalmente por DGFI (Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut) como Centro de Procesamiento Regional (RNAAC: Regional Network Associate Analysis Center) del Servicio Internacional GPS (IGS: International GPS Service), lo que garantiza su referencia permanente con el sistema geocéntrico global (Seemueller and Drewes 1998, 2002).

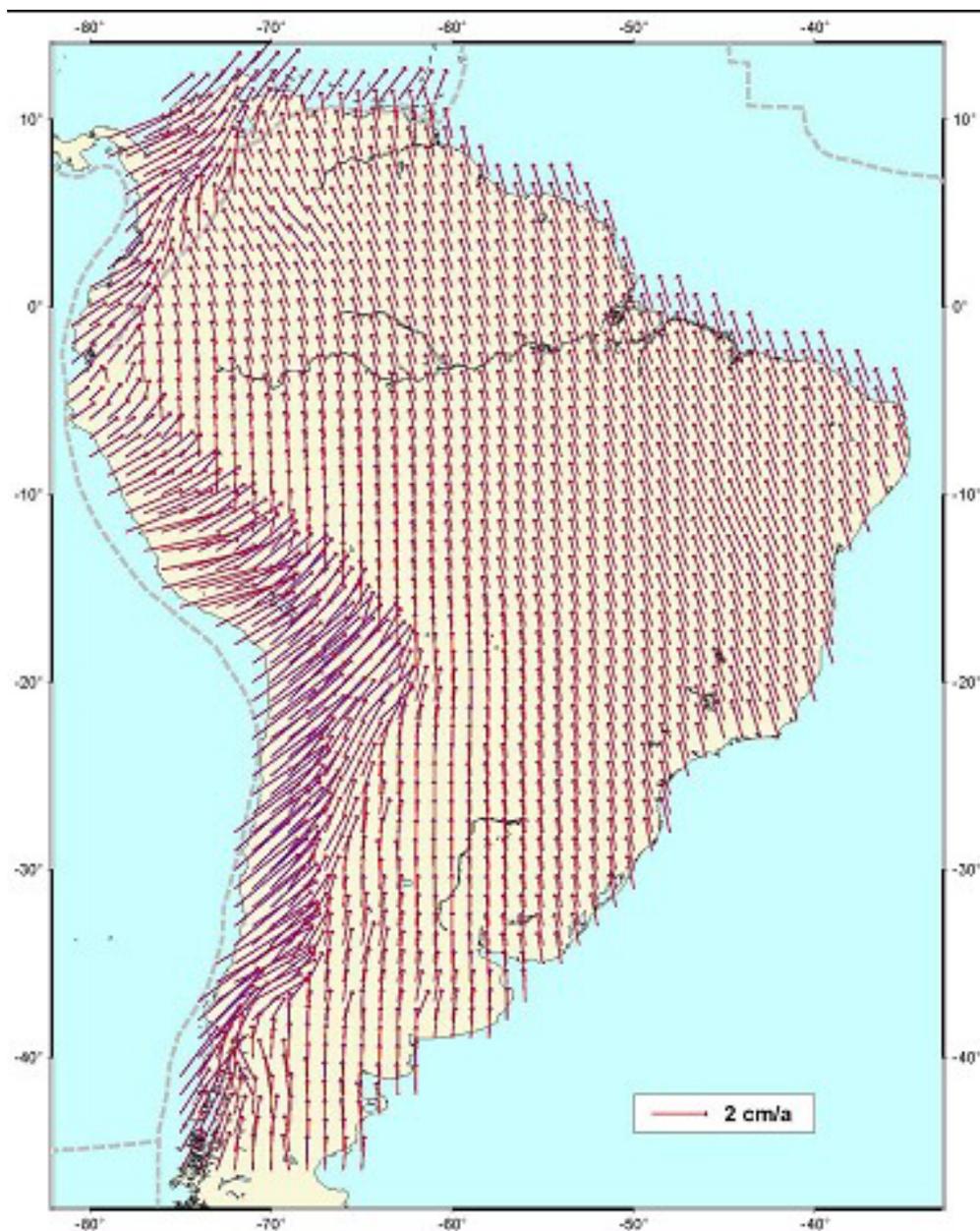


Figura 2.4 Modelo de velocidades para América del Sur (Drewes and Heidbach, 2003).

El cálculo de las velocidades de los puntos SIRGAS se ha hecho con base en las estaciones GPS de funcionamiento continuo (Seemueller et al. 2002), las campañas de 1995 y 2000 y los proyectos geodinámicos desarrollados en el continente, entre los que se destacan: CAP (Central Andes GPS Project), SAGA (South America Geodynamics Activity), SNAPP (South America – Nazca Plate Motion Project) y CASA (Central And South America GPS Geodynamics Project) (Drewes et al. 1995, Kellogg and Vega 1995). La figura 2.4 muestra el modelo de velocidades vigente (Drewes and Heidbach 2003).

Las actividades actuales del proyecto SIRGAS se centran en la definición y adopción de un sistema vertical de referencia compatible con el tridimensional ya establecido (Drewes et al. 2001). El sistema SIRGAS es el resultado de la conjunción de esfuerzos internacionales en una gran cantidad de factores que lo ubican en el primer lugar de la lista de sistemas de referencia regionales. Su estructura, consistencia, precisión y exactitud lo clasifican en el ejemplo a seguir y se constituye en el fundamento básico para el avance de los sistemas de referencia nacionales en América. Por esta razón, la ONU en su Séptima Conferencia Cartográfica para las Américas (Nueva York, enero de 2001) recomendó la adopción de SIRGAS como sistema de referencia oficial para todos los países de América. (ver: <http://www.ibge.gov.br/home/geografia/geodesico/sirgas/principal>).

2.4 Nuevo sistema tridimensional de referencia para Colombia: MAGNA (Marco Geocéntrico Nacional de Referencia)

SIRGAS es la extensión del ITRF en América; no obstante, dadas las características técnicas de los sistemas GNSS, debe ser densificado para satisfacer los requerimientos en precisión de los usuarios de información georreferenciada en los diferentes países. En este sentido, el Directorio de Directores de Institutos Geográficos de América del Sur, España y Portugal (DIGSA), acordó que todos los sistemas nacionales de referencia en América del Sur deben ser definidos sobre SIRGAS y que por tanto, deben ser una densificación del mismo (Brasilia 1998).

En Colombia, el IGAC, organismo nacional encargado de determinar, establecer, mantener y proporcionar los sistemas oficiales de referencia geodésico, gravimétrico y magnético (Decretos No. 2113/1992 y 208/2004) inició a partir de las estaciones SIRGAS la determinación de la Red Básica GPS, denominada MAGNA (Marco Geocéntrico Nacional de Referencia) que, por estar referida a SIRGAS se denomina convencionalmente **MAGNA-SIRGAS**. Ésta está conformada por cerca de 70 estaciones GPS de cubrimiento nacional de las cuales 6 son de funcionamiento continuo, 8 son vértices SIRGAS y 16 corresponden con la red geodinámica CASA (Central and South American Geodynamics Network) (figura 2.5). Las coordenadas de las estaciones **MAGNA-SIRGAS** están definidas sobre el ITRF94, época 1995.4. Su precisión interna está en el orden de (± 2 mm ... ± 7 mm), su exactitud horizontal en ± 2 cm y la vertical en ± 6 cm (Tremel et al. 2001, Sánchez et al. 1999).



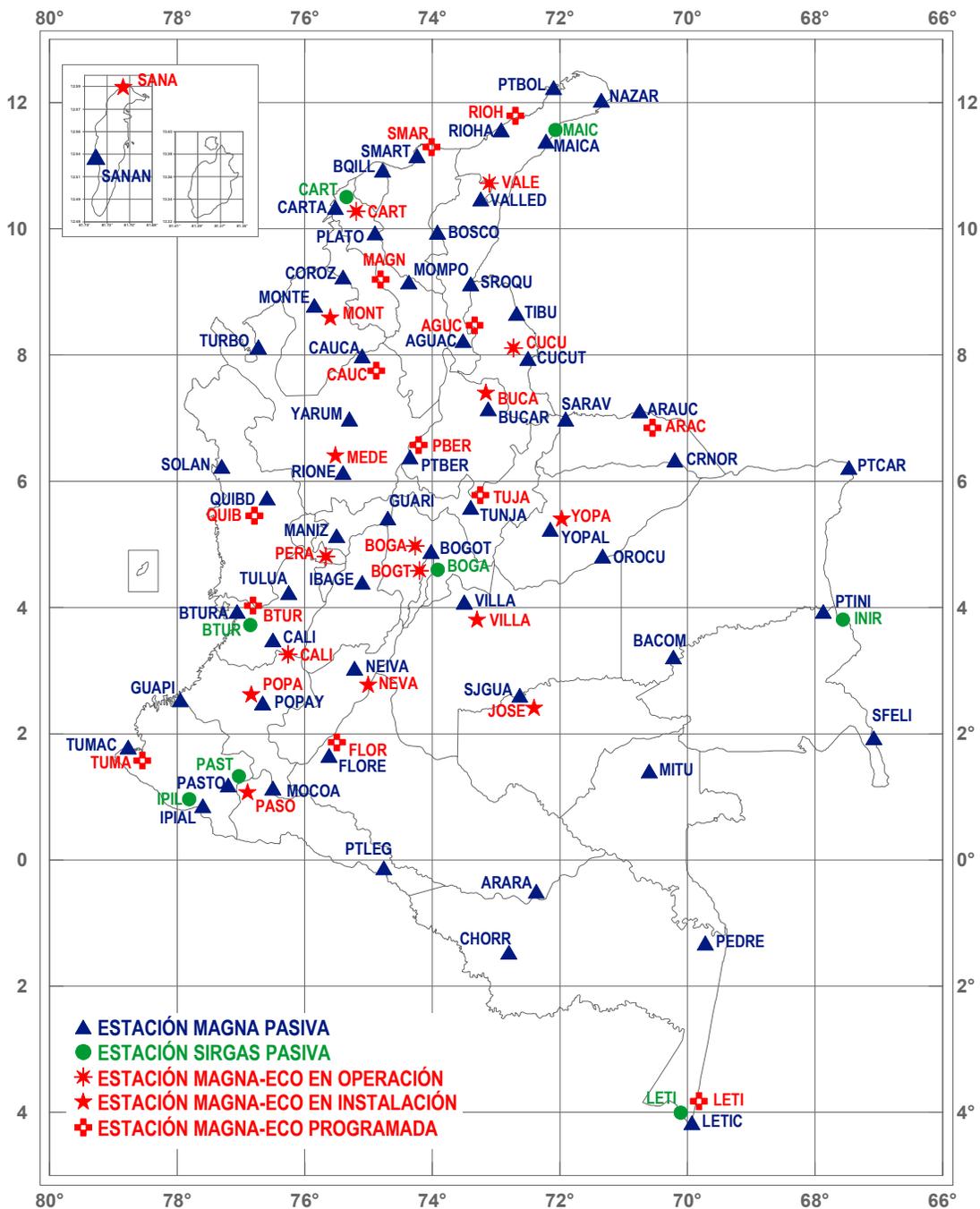


Figura 2.5 Sistema **MAGNA-SIRGAS**: Red básica GPS y estaciones de funcionamiento continuo (**MAGNA-ECO**) (Estado octubre de 2004)

Dado que Colombia se haya ubicada sobre la zona de convergencia de tres placas (figura 2.4), la dinámica tectónica (placas rígidas + zonas de deformación) genera variaciones anuales entre 1 y 2 cm en las coordenadas geodésicas (Drewes and Heidbach 2003, Drewes



et al. 1995, Kellogg and Vega 1995), las cuales deben ser tenidas en cuenta en el procesamiento de información geodésica precisa. De esta forma, con el propósito de determinar precisamente dichas variaciones, el IGAC adelanta la instalación de una red de estaciones GPS de funcionamiento continuo (red *MAGNA-ECO*), administradas desde su Sede Central y procesadas en conjunto con el Centro de Análisis Regional del IGS en el DGFI (RNAAC-SIR), de modo que sus posiciones también sean orientadas permanentemente con el ITRF vigente. De dichas estaciones ya están funcionando las correspondientes a Bogotá, Cartagena, Cali, Pereira, Cúcuta y Valledupar y, se adelanta la instalación de 10 estaciones más (figura 2.5). Las especificaciones seguidas por el IGAC en el procesamiento de información GPS considerando las velocidades de las coordenadas se describe en el anexo 4.

Además de los objetivos científicos considerados en el diseño y ejecución del sistema de referencia *MAGNA-SIRGAS*, su aplicabilidad práctica radica en su utilización por parte de los generadores y consumidores de información georreferenciada en el país. Para el efecto, el IGAC proporciona la información de las estaciones GPS de rastreo continuo a sus usuarios, de modo que operen como estación base en los levantamientos GPS diferenciales y extiende la Red Básica GPS mediante su densificación, incluyendo aquellos proyectos geodésicos que buscan proporcionar redes regionales de referencia y que son desarrollados bajo las especificaciones IGAC para el establecimiento de redes geodésicas, como por ejemplo las redes de Aeronáutica Civil, del Quindío, de Medellín, de Bucaramanga, etc.

2.5 Antiguo datum geodésico horizontal en Colombia: DATUM BOGOTÁ

Antes de la definición del sistema *MAGNA-SIRGAS* la plataforma de referencia nacional estaba constituida por un datum geodésico horizontal, adoptado en 1941, cuyo elipsoide asociado corresponde con el Internacional de 1924 y cuyo punto datum se localizó en el Observatorio Astronómico de Bogotá, de aquí su nombre (Ruíz y Arjona 1941). A partir de este marco, el IGAC inició hace 60 años el establecimiento de la red geodésica de control horizontal (ARENA: Antigua Red Nacional), la cual está conformada por cerca de once mil puntos, que constituyen los vértices geodésicos de primer, segundo y tercer orden. La red de primer orden fue determinada mediante arcos de triangulación distribuidos sobre las cumbres más prominentes del territorio nacional y fueron ajustados a partir de 33 estaciones astronómicas (figura 2.6). Esta red dio apoyo a los vértices de segundo orden y éstos a su vez a los de tercer orden, para lo cual se emplearon métodos topográficos de precisión (triangulación, bisección, trilateración y poligonación) en su determinación. La precisión de las coordenadas horizontales (ϕ , λ) así obtenidas depende directamente de la certidumbre de las mediciones angulares ópticas, la cual varía entre 0,01" y 0,1". Asimismo, la altura de los vértices geodésicos se determinó a partir del Datum Buenaventura a través de nivelación trigonométrica, cuya precisión no es mejor que 0,80 m.



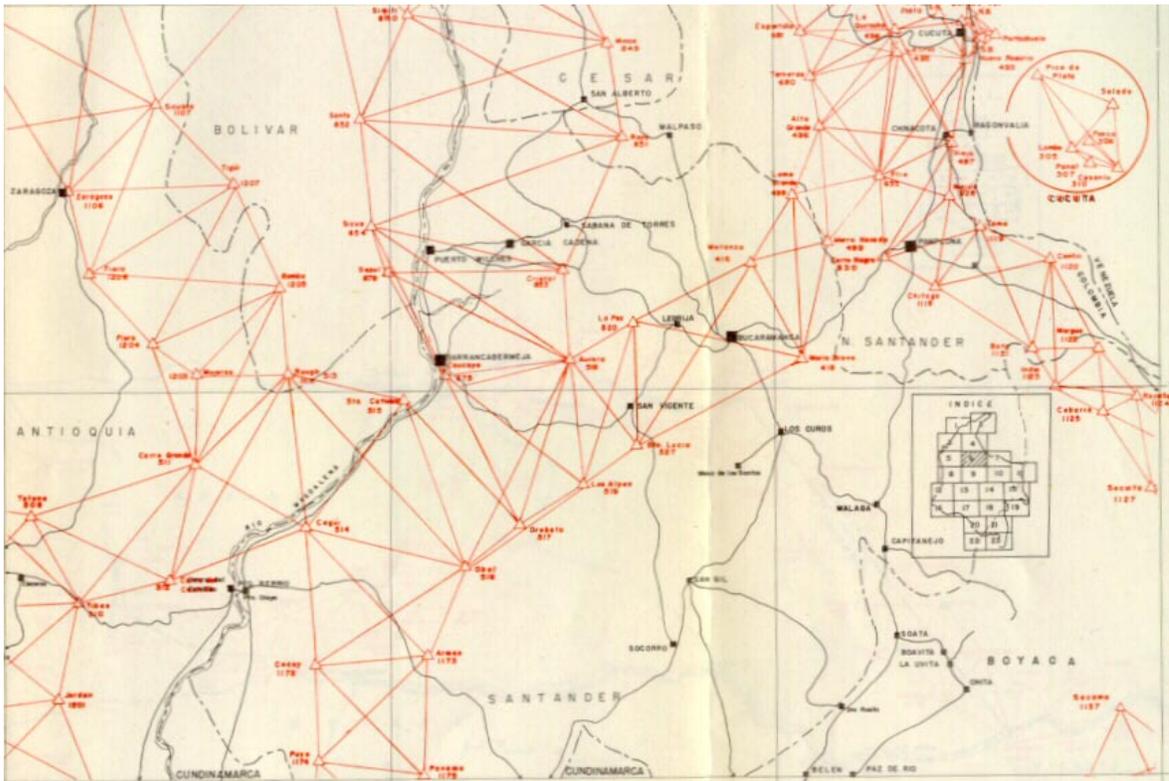


Figura 2.6 ARENA: Arco de triangulación Bogotá - Bucaramanga - Cúcuta

Sin duda el Datum BOGOTÁ y su red ARENA constituyeron una obra de excelente calidad en su tiempo. De hecho, por más de 60 años ellos han sido la base para la cartografía y la agrimensura a cualquier escala en el país. No obstante, debido a las desventajas de las técnicas geodésicas clásicas en relación con las tecnologías modernas, éstos presentan ciertas incompatibilidades con los actuales GNSS que obligan la generación de la base cartográfica nacional y de los datos fundamentales de georreferenciación sobre el nuevo sistema *MAGNA-SIRGAS* y su correspondiente adopción y utilización por parte de generadores y consumidores de datos espaciales en Colombia.

2.6 Modelo geoidal para Colombia: GEOCOL2004

El Sistema *MAGNA-SIRGAS* proporciona, primariamente, coordenadas tridimensionales geocéntricas $[X, Y, Z]$, las cuales pueden expresarse en coordenadas geográficas, latitud (ϕ) y longitud (λ) y alturas (h) sobre el elipsoide de referencia. La obtención de alturas clásicas (referidas al nivel medio del mar) requiere la determinación, a partir del análisis del campo de gravedad terrestre, de una superficie vertical de referencia (geoide o cuasi-geoide) y su relación con dicho elipsoide.

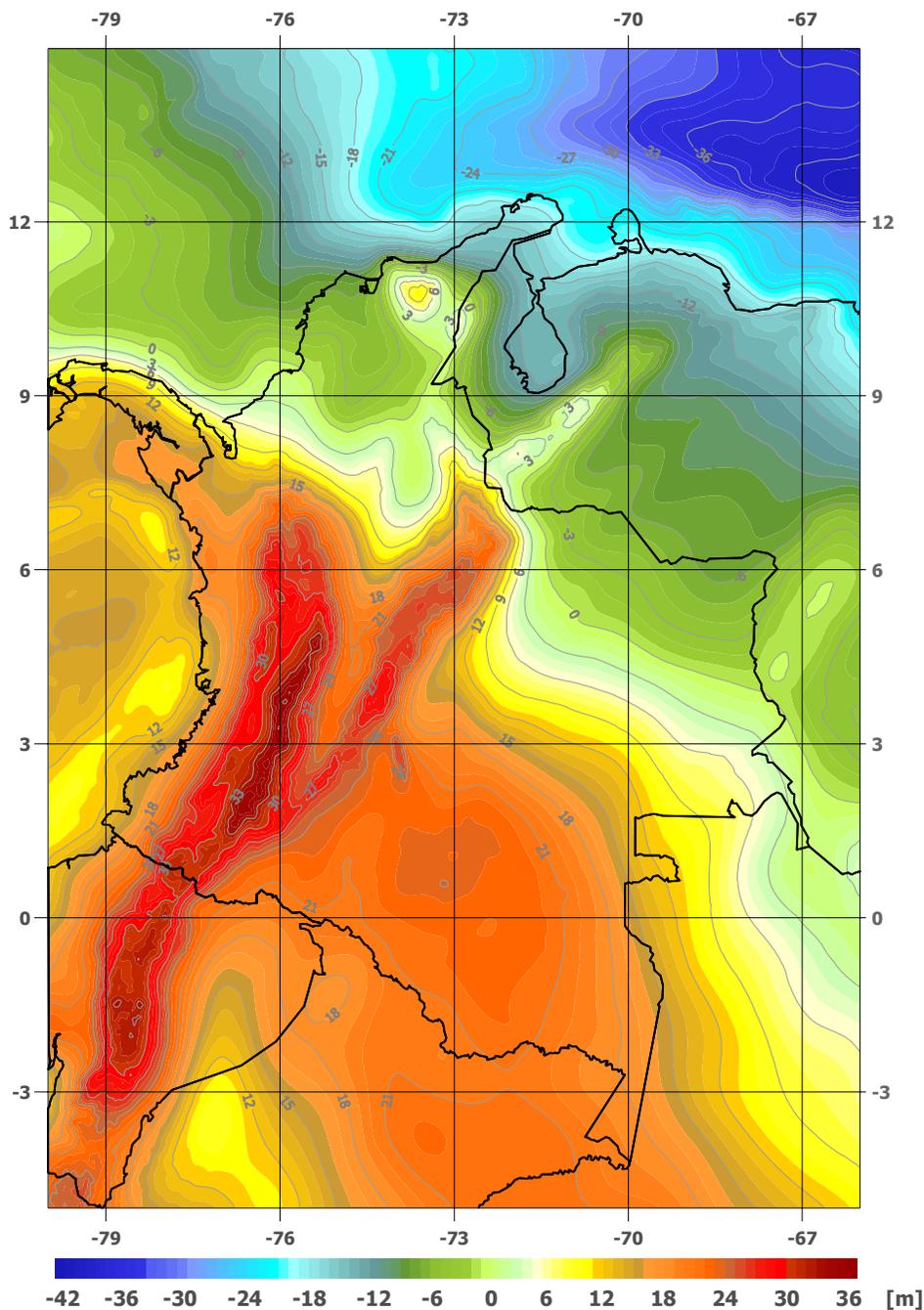


Figura 2.7 Modelo geoidal (cuasi-geoidal) para Colombia (GEOCOL2004)

El geoide (cuasi-geoide) en Colombia se ha determinado mediante la técnica remove/restore. Ésta permite relacionar las características regionales (longitudes de onda larga) del campo de gravedad, expresadas en un Modelo Geopotencial Global (MGG), y sus detalles (longitudes de onda corta), obtenidos a través de la evaluación local del

modelo físico matemático de Stokes (o Molodensky). En el modelo GEOCOL2004, la componente geoidal global ha sido calculada con el Modelo TEG-4 (Texas Earth Gravity 4, Tapley et al. 2001) y la local, con anomalías gravimétricas medias ($2' \times 2'$). Las alturas geoidales (cuasi-geoidales) obtenidas oscilan entre -21 m y 34 m (figura 2.7) (Sánchez 2003).

La principal aplicación práctica del modelo geoidal (cuasi-geoidal) calculado, se basa en la determinación de alturas similares a las niveladas a partir de información GPS, lo que se traduce en la extensión del control vertical hasta áreas poco densificadas como los Llanos Orientales y la zonas selváticas del país. De acuerdo con esto, paralelamente a la determinación del geoide, se ha diseñado una metodología de nivelación satelital (anexo 3), que permite establecer alturas sobre el nivel medio del mar utilizando las elipsoidales, obtenidas de los levantamientos GPS ligados a *MAGNA-SIRGAS*, y las ondulaciones geoidales (cuasi-geoidales) calculadas (Sánchez & Martínez 1999). Las alturas clásicas determinadas por este método presentan precisiones similares a las obtenidas por nivelaciones trigonométricas ($\pm 0,80$ m).

3 *MAGNA-SIRGAS* vs. Datum BOGOTÁ

Un datum geodésico proporciona la base fundamental para la definición de la ubicación geográfica de un punto, dicha ubicación puede expresarse en coordenadas curvilíneas (latitud, longitud) o planas (norte, este), las cuales se obtienen mutuamente a través de relaciones geométricas. Independientemente del tipo de coordenadas que se prefieran, sus valores están en función del tamaño, la forma y la ubicación del elipsoide de referencia; de allí, si el datum es modificado, las coordenadas (geográficas o planas) de cualquier punto también cambian, sin que éste haya sido alterado físicamente. Como ejemplo, en la figura 2.1 puede apreciarse el cambio drástico en las coordenadas curvilíneas del punto P al ser referido al datum global y a uno local.

En la presente sección se describen las principales diferencias entre *MAGNA-SIRGAS* y el Datum BOGOTÁ, las cuales necesariamente, se traducen en el cambio mínimo de las coordenadas de un mismo punto al ser vinculado a estas dos plataformas de referencia.

3.1 Deformación del Datum BOGOTÁ y su red geodésica ARENA

La vinculación de las redes geodésicas antiguas a los nuevos marcos geocéntricos de referencia es posible mediante posicionamiento satelital en algunos vértices de aquellas. Este procedimiento, además de permitir el cálculo de parámetros de transformación, facilita el control de calidad de las redes antiguas, hecho que no era posible con las técnicas precedentes a la geodesia satelital.



En Colombia se han ocupado con GPS aproximadamente 110 puntos clásicos. Si bien ésta no es la cantidad óptima, se han identificado deformaciones sistemáticas de la red ARENA que mejoran la precisión de los parámetros de transformación y por ende, dan mayor fiabilidad al proceso de migración del Datum BOGOTÁ a *MAGNA-SIRGAS*.

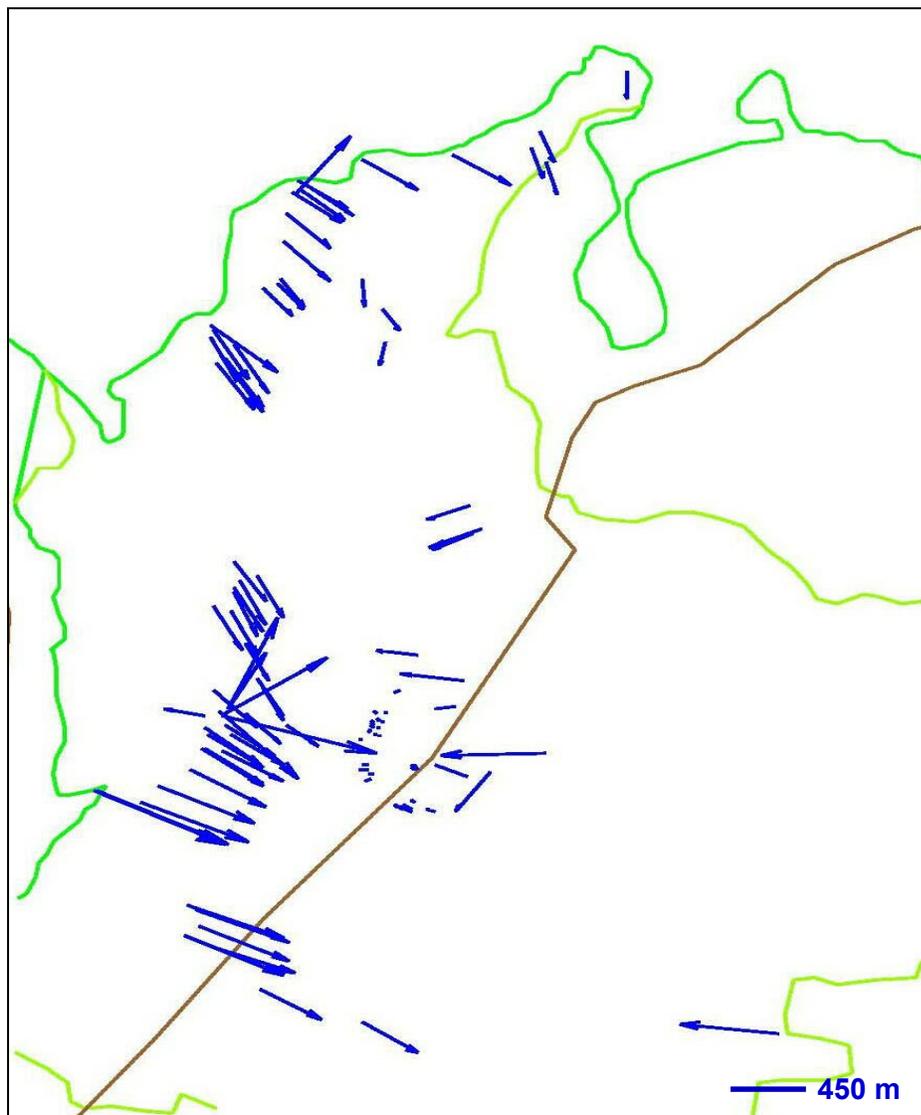


Figura 3.1 Distorsiones de la red ARENA con respecto a *MAGNA-SIRGAS*

La figura 3.1 muestra las desviaciones de las coordenadas Datum BOGOTÁ de los vértices ARENA ocupados con GPS, con respecto a sus posiciones *MAGNA-SIRGAS*. Si la red ARENA estuviese libre de deformaciones y solamente desplazada por no ser geocéntrica, dichas desviaciones serían constantes. Sin embargo, como en toda red de triangulación, entre las dificultades del método clásico está la omisión de la deflexión de la vertical en los

puntos geodésicos, ésta era considerada sólo en estaciones fundamentales (Laplace), la reducción inadecuada de las distancias al elipsoide (por el conocimiento impreciso del geoide) y, especialmente, el cálculo *paso a paso* de grandes arcos de triangulación, con la correspondiente generación de restricciones (*constraints*) al conectar un segmento de la red a otro. Estos tres aspectos conducen a distorsiones de la red de diferente tipo con errores de escala de $\pm 10^{-5}$ que varían de región a región. Es así como por ejemplo, en el arco de triangulación que se extiende sobre el Alto de La Línea se observa una distorsión que se propaga en los levantamientos referidos a este arco adelantados posteriormente en la zona occidental del país, alcanzando valores extremos en Buenaventura (figura 3.1). Caso contrario se presenta en el arco de triangulación medido a lo largo del Valle del Río Magdalena y que finaliza en el departamento de La Guajira, donde las desviaciones de los puntos ARENA son mucho menores.

Otra componente importante en la imprecisión de las coordenadas de las redes clásicas es la definición misma del sistema local de referencia. Inicialmente, las coordenadas del punto fundamental (pilastra sur del Observatorio Astronómico de Bogotá, en el caso de Colombia) se fijaban asumiendo equivalencia entre las coordenadas astronómicas observadas (Φ , Λ) y la altura nivelada (H) a partir del nivel medio del mar con las coordenadas elipsoidales correspondientes (φ , λ , h), es decir, se suponía que

$$\xi_F = \eta_F = N_F = 0 \quad (3.1)$$

siendo ξ_F y η_F las componentes de la deflexión de la vertical en sentido norte-sur y este-oeste y N_F la ondulación geoidal del punto datum. Esta estrategia provee una buena aproximación del elipsoide al geoide en la cercanía del punto origen, pero conduce a grandes desviaciones en las áreas más remotas. De allí, los errores relativos en las coordenadas se incrementan, con respecto al punto de partida, de algunos decímetros sobre cien kilómetros hasta un metro sobre varios cientos de kilómetros en los extremos más alejados de la triangulación. Es por esto que las desviaciones de ARENA en la Sabana de Bogotá y sus alrededores son mínimas, pero aumentan considerablemente hacia el sur-occidente y norte (exceptuando el departamento de la Guajira) del país. De otra parte, amén que las redes clásicas de primer orden, y en algunos casos, las de segundo orden eran calculadas sobre un elipsoide de referencia utilizando coordenadas curvilíneas (φ , λ), las redes de densificación (de ordenes inferiores) se calculaban en sistemas cartesianos después de una proyección conforme del elipsoide en un plano, generándose mayores discrepancias.

Además de estas fuentes de error inherentes a los métodos clásicos en la determinación de redes geodésicas, también están presentes las equivocaciones groseras que no eran fácilmente detectables con el estado del arte vigente en aquellas épocas, es así como en la figura 3.1 se ven algunos vectores de deformación, cuyas magnitudes y direcciones no guardan relación alguna con su entorno.

3.2 Vinculación del Datum BOGOTÁ a *MAGNA-SIRGAS*

Con ocasión de los 200 años del Observatorio Astronómico de Bogotá, celebrados en agosto de 2003, se adelantó el posicionamiento GPS de la pilastra que materializa el Datum BOGOTÁ. Dicho posicionamiento se realizó con equipos de precisión geodésica utilizando el método estático diferencial, durante siete días, veinticuatro horas continuas en las semanas GPS 1231 y 1232. Los puntos de referencia corresponden con la estación IGS global BOGT y la estación BOGA de la red regional IGS-RNAAC-SIR. La información fue procesada utilizando las rutinas estándares del software Bernese, versión 4.2 (Hugentobler et al. 2001), y el promedio de las coordenadas de referencia presentadas en las soluciones globales IGS03P1231 e IGS03P1232 para BOGT y MIT1231P y MIT1232P para BOGA (<ftp://cddisa.gsfc.nasa.gov/gps/products/GPSWeek>). Los resultados obtenidos (coordenadas geocéntricas ITRF2000, época 2003.8) son:

$$\begin{aligned} X &= 1\,744\,890,254 \pm 0,013 \text{ m} \\ Y &= -6\,116\,370,847 \pm 0,003 \text{ m} \\ Z &= 507\,899,327 \pm 0,005 \text{ m} \end{aligned}$$

Estas coordenadas fueron transformadas a *MAGNA-SIRGAS* (ITRF94, 1995.4) utilizando los parámetros del IERS para ir del ITRF2000 al ITRF94 (IERS 2003) y aplicando el modelo de velocidades oficial de SIRGAS (Drewes and Heidbach 2003) para reducirlas a la época de referencia (1995.4). De esta forma, las coordenadas *MAGNA-SIRGAS* del punto datum BOGOTÁ (pilastra sur del Observatorio Astronómico de Bogotá) son:

$$\begin{aligned} X &= 1\,744\,890,240 \text{ m} & \varphi &= 04^{\circ} 35' 46,3215'' \text{ N} \\ Y &= -6\,116\,370,860 \text{ m} & \lambda &= 74^{\circ} 04' 39,0285'' \text{ W} \\ Z &= 507\,899,216 \text{ m} & h &= 2\,641,469 \text{ m} \end{aligned}$$

Su comparación con los valores correspondientes referidos al Datum BOGOTÁ ($\varphi = 04^{\circ} 35' 56,57'' \text{ N}$, $\lambda = 74^{\circ} 04' 51,30'' \text{ W}$) muestra diferencias en latitud de $\Delta\varphi = -10,25''$ ($\sim -307,5 \text{ m}$) y en longitud de $\Delta\lambda = -12,27''$ ($\sim -368,2 \text{ m}$). Estas cantidades corresponden con el cambio mínimo de las coordenadas de un punto al ser migrado de Datum BOGOTÁ a *MAGNA-SIRGAS*.

3.3 Diferencias entre el Datum BOGOTÁ y *MAGNA-SIRGAS*

El Datum BOGOTÁ materializa al ITRS con un error sistemático de, aproximadamente, 500 m debido al desplazamiento de su origen con respecto al geocentro. Esto significa que las posiciones definidas sobre el Datum BOGOTÁ aparecen trasladadas en una cantidad similar con respecto a las posiciones definidas sobre *MAGNA-SIRGAS*. El error relativo de la red ARENA varía de acuerdo con la región del país, lo que no permite un control apropiado para levantamientos GPS precisos y, a diferencia de *MAGNA-SIRGAS*, que es un sistema de referencia tridimensional, el Datum BOGOTÁ es un marco bidimensional en el que se dispone de coordenadas curvilíneas (φ , λ) y altura sobre el nivel medio del mar



(H), sin conocerse la altura elipsoidal (h) correspondiente. Estas diferencias imposibilitan la utilización del Datum BOGOTÁ como plataforma de referencia para el desarrollo de levantamientos de posicionamiento global apoyado en satélites, obligando la adopción oficial de **MAGNA-SIRGAS** en su reemplazo.

Las principales discrepancias entre el Datum BOGOTÁ y **MAGNA-SIRGAS** se resumen en:

Tabla 3.1 Diferencias entre el Datum BOGOTÁ y **MAGNA-SIRGAS**

MAGNA-SIRGAS	Datum BOGOTÁ	Discrepancia
Geocéntrico	No geocéntrico	El origen de coordenadas [X=0, Y=0, Z=0] del Datum BOGOTÁ está desplazado del origen de coordenadas de MAGNA-SIRGAS (geocentro) ~531 m.
Tridimensional	Bidimensional	Las coordenadas curvilíneas (φ , λ , h) de MAGNA-SIRGAS se refieren a la misma superficie de referencia (el elipsoide), mientras que en el Datum BOGOTÁ, (φ , λ) se refieren al elipsoide y H al nivel medio del mar, imposibilitándose la definición consistente de coordenadas tridimensionales.
Elipsoide asociado: GRS80 (Geodetic Reference System 1980) a = 6 378 137 m 1/f = 298, 257 222 101	Elipsoide asociado: Internacional o de Hayford (1924) a = 6 378 388 1/f = 297	La diferencia de los elipsoides asociados a MAGNA-SIRGAS y al Datum BOGOTÁ no sólo radica en su ubicación con respecto al geocentro, sino también en sus dimensiones geométricas; los radios ecuatoriales discrepan 251 m y los aplanamientos $1,42 \times 10^{-5}$.
Precisión (consistencia interna de la red): 2 mm ... 7 mm	Precisión (consistencia interna de la red): 0,01" (~30 cm) ... 0,1" (~3m)	La consistencia de las coordenadas determinadas entre puntos de la misma red es entre cien y mil veces mejor para MAGNA-SIRGAS que para el Datum BOGOTÁ, cuya mayor limitación está dada por la precisión de los instrumentos ópticos utilizados en la determinación de los vértices clásicos.
Exactitud (con respecto a las coordenadas SIRGAS=ITRF=WGS84): φ , λ = 2 cm h = 6 cm.	Exactitud (con respecto a las coordenadas SIRGAS=ITRF=WGS84): φ , λ = ~500 m	La exactitud representa la consistencia de las coordenadas de una red con respecto a otras redes determinadas independientemente. Si dichas redes son establecidas a partir del sistema global de referencia, la compatibilidad entre ellas es bastante alta (~2 cm), mientras que, aquellas que están referidas a datum locales requieren de procedimientos adicionales de transformación que permitan su comparación.

Coordenadas del punto datum (Observatorio Astronómico de Bogotá)	Coordenadas del punto datum (Observatorio Astronómico de Bogotá)	Las coordenadas del punto datum referidas a los dos sistemas difieren entre si, aproximadamente, 500 m, los cuales equivalen a la discrepancia mínima para cualquier punto de la red antigua ARENA con respecto a MAGNA-SIRGAS .
$\varphi = 04^{\circ} 35' 46,3215''$	$\varphi = 04^{\circ} 35' 56,57''$	$\Delta\varphi = -10,25'' \dots \sim -307,5 \text{ m}$
$\lambda = 74^{\circ} 04' 39,0285''$	$\lambda = 74^{\circ} 04' 51,30''$	$\Delta\lambda = -12,27'' \dots \sim -368,2 \text{ m}$
$h = 2641,469 \text{ m}$	$h = \text{indeterminable}$	

4 TIPOS DE COORDENADAS MANEJADOS EN COLOMBIA

En Colombia se utilizan básicamente tres tipos de coordenadas: las cartesianas tridimensionales, las curvilíneas o elipsoidales y las planas de proyección, las cuales pueden ser Gauss-Krüger o cartesianas bidimensionales. Si bien, cada uno de estos tipos tiene sus ventajas y desventajas, en esencia, son tres formas diferentes, pero equivalentes, de establecer la ubicación geográfica de un punto. En las siguientes secciones se presentan las definiciones correspondientes y la formulación que permite la conversión entre los diferentes tipos de coordenadas. Algunos ejemplos numéricos se relacionan en el anexo 1.

4.1 Coordenadas cartesianas tridimensionales

Corresponden con la extensión, en metros, de las líneas paralelas a los tres ejes coordenados [X, Y, Z] que se extienden entre el punto y su intersección con cada eje (figura 4.1). La ubicación geográfica del punto se expresa unívocamente con la tripleta [Xp, Yp, Zp]. Si el origen del sistema cartesiano [X=0, Y=0, Z=0] coincide con el centro de masas terrestre, éstas se definen como coordenadas cartesianas geocéntricas.

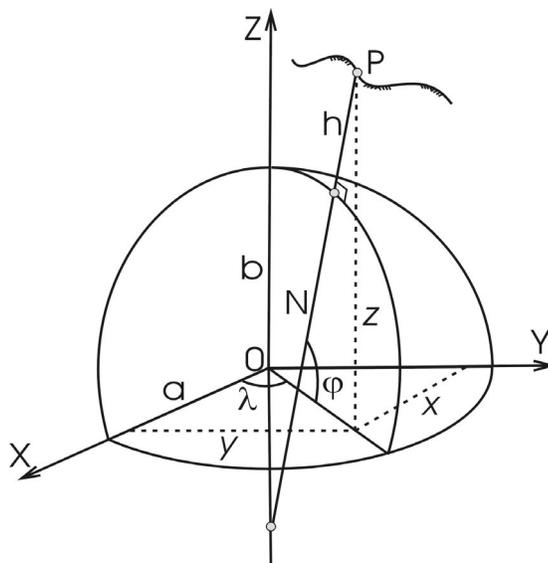


Figura 4.1 Coordenadas cartesianas tridimensionales [X, Y, Z] y elipsoidales [φ, λ, h]

La principal ventaja de este tipo de coordenadas es que son independientes del elipsoide y permiten la referenciación de puntos u objetos alejados de la superficie terrestre, como por ejemplo los satélites. De allí, estas coordenadas se obtienen primariamente en el posicionamiento basado en técnicas espaciales (sistemas GNSS).

4.2 Coordenadas elipsoidales

También conocidas como geográficas o curvilíneas, corresponden con las cantidades latitud y longitud, las cuales se expresan en el sistema sexagesimal de grados, minutos y segundos. La latitud (φ) se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la normal (N) al elipsoide que pasa por el punto de interés (figura 4.1); es positiva hacia el norte de la línea ecuatorial y negativa hacia el sur. Su rango está dado por $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$ o $90^\circ S \leq \varphi \leq 90^\circ N$.

La longitud (λ) es el ángulo, medido sobre el plano ecuatorial, entre el meridiano de referencia (normalmente Greenwich) y el meridiano del punto de interés (figura 4.1); es positiva al este de Greenwich y negativa hacia el oeste. Su rango se define mediante $-180^\circ \leq \lambda \leq +180^\circ$ o $180^\circ W \leq \lambda \leq 180^\circ E$, lo que también equivale a $0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ$.

Los valores de la latitud y la longitud están en función del tamaño, forma y ubicación del elipsoide de referencia seleccionado, es decir, que dependen completamente del datum geodésico; pero una vez ésta se ha definido, sus valores son unívocos. La tercera dimensión en este tipo de coordenadas está dada por la altura elipsoidal, la cual equivale a la distancia, medida a lo largo de la normal elipsoidal que pasa por el punto de interés, entre la superficie del elipsoide y dicho punto (figura 4.1); ésta se expresa en metros.

4.3 Coordenadas planas

Amén que las coordenadas de las redes nacionales (o marcos) de referencia son representadas en términos de sistemas cartesianos tridimensionales $[X, Y, Z]$ o sistemas elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$, dichos valores resultan inconvenientes para el desarrollo de aplicaciones prácticas, ya que, por ejemplo, la extensión de un segundo de arco en longitud (λ), y en menor medida la de un segundo en latitud (φ), sobre la superficie terrestre varía de una latitud a otra o, en el caso de las coordenadas tridimensionales, sus diferencias en áreas pequeñas de trabajo se reflejan en las últimas cifras significativas de las cantidades. En este sentido, se acostumbra la representación de la superficie terrestre sobre un plano, mediante un sistema bidimensional de coordenadas rectangulares, llamado Sistema de Proyección Cartográfica, el cual muestra la correspondencia biunívoca entre los puntos de la superficie terrestre (φ, λ) y sus equivalentes sobre un plano de proyección (N, E).

El tipo de proyección utilizada obedece al objetivo de la cartografía. Normalmente, para escalas pequeñas (menores que 1:10 000) se utilizan proyecciones conformes (Gauss-Krüger, Lambert, UTM, etc.), cuyo plano de proyección se hace tangente al elipsoide de

referencia, mientras que para escalas grandes (1:500 ... 1:5000) este plano se define a la altura media de la comarca a proyectar. Las primeras se utilizan para obtener cartografía de conjunto de áreas amplias, como por ejemplo países, departamentos o áreas metropolitanas, las últimas para la representación de zonas urbanas, siendo de especial importancia para el desarrollo de trabajos catastrales, topográficos y de todas aquellas disciplinas que pueden asumir la superficie terrestre plana sin mayor pérdida de la precisión requerida en el desarrollo de sus labores. En Colombia se utiliza, para el primer caso, la proyección cartográfica de Gauss-Krüger y, para el segundo, la proyección cartesiana.

4.3.1 Proyección cartográfica Gauss-Krüger

La proyección cartográfica oficial de Colombia es el sistema Gauss-Krüger. Éste es una representación conforme del elipsoide sobre un plano, es decir, que el ángulo formado entre dos líneas sobre la superficie terrestre se mantiene al ser éstas proyectadas sobre el plano. Los meridianos y paralelos se interceptan perpendicularmente, pero no son líneas rectas, sino curvas complejas, excepto el meridiano central (de tangencia) y el paralelo de referencia (figura 4.2). La escala de la representación permanece constante sobre el meridiano central, pero ésta varía al alejarse de aquel, introduciendo deformaciones en función de la longitud (λ). Por tal razón, el desarrollo de la proyección se controla mediante husos, que en el caso de Colombia se extienden $1,5^\circ$ al lado y lado del meridiano central.

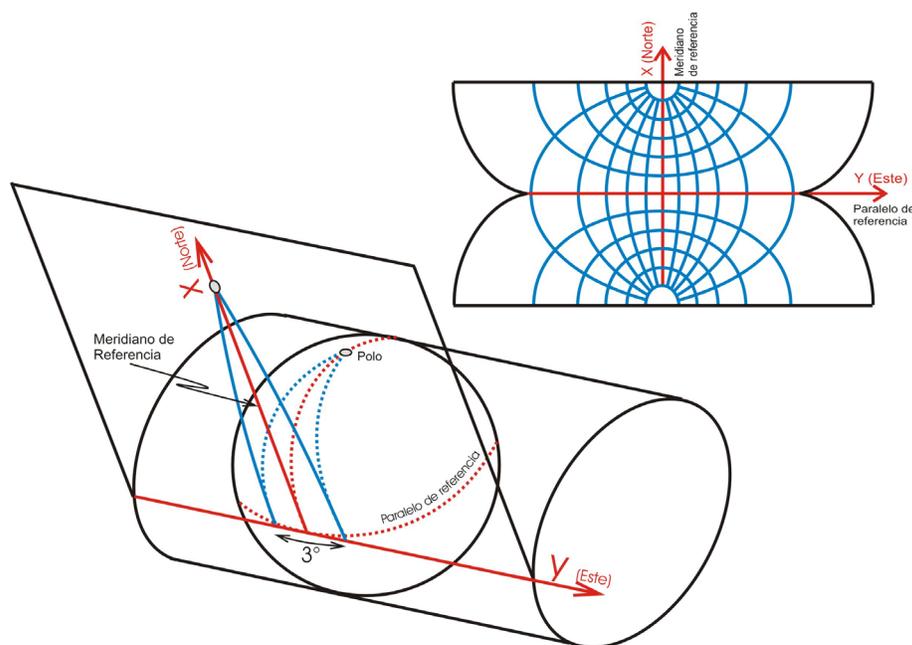


Figura 4.2 Sistema de proyección cartográfica Gauss-Krüger

El sistema de proyección UTM (Universal Transverse Mercator) corresponde con el de Gauss-Krüger, sólo que utiliza un factor de escala equivalente a $m = 0,9996$ para el meridiano central y husos de 6° .

En Colombia, el origen principal de las coordenadas Gauss-Krüger se definió en la pilastra sur del Observatorio Astronómico de Bogotá, asignándose los valores $N = 1\ 000\ 000$ m y $E = 1\ 000\ 000$ m. Los orígenes complementarios se han establecido a 3° y 6° de longitud al este y oeste de dicho punto. Este sistema se utiliza para la elaboración de cartografía a escalas menores que 1:1 500 000, donde se proyecta la totalidad del territorio nacional. También se utiliza para cartografía a escalas entre 1:10 000 y 1:500 000 de las comarcas comprendidas en la zona de 3° correspondiente.

Las coordenadas **MAGNA-SIRGAS** de los orígenes Gauss-Krüger en Colombia corresponden con:

Tabla 4.1 Coordenadas **MAGNA-SIRGAS** de los orígenes de las zonas de proyección Gauss-Krüger en Colombia

Origen	Coordenadas Elipsoidales		Coordenadas Gauss-Krüger	
	Latitud (N)	Longitud (W)	Norte [m]	Este [m]
Bogotá-MAGNA	4° 35' 46,3215"	74° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0
Este Central - MAGNA	4° 35' 46,3215"	71° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0
Este Este - MAGNA	4° 35' 46,3215"	68° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0
Oeste - MAGNA	4° 35' 46,3215"	77° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0
Oeste Oeste - MAGNA	4° 35' 46,3215"	80° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0

Las coordenadas en Datum BOGOTÁ de los orígenes Gauss-Krüger en Colombia corresponden con:

Tabla 4.2 Coordenadas en Datum BOGOTÁ de los orígenes de las zonas de proyección Gauss-Krüger en Colombia

Origen	Coordenadas Elipsoidales		Coordenadas gauss-Krüger	
	Latitud (N)	Longitud (W)	Norte [m]	Este [m]
Bogotá - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	74° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0
Este Central - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	71° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0
Este Este - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	68° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0
Oeste - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	77° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0
Oeste Oeste - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	80° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0

Dado el requerimiento propio de la proyección Gauss-Krüger de introducir varios orígenes para la representación cartográfica del territorio colombiano, pueden presentarse puntos diferentes con valores de coordenadas idénticos, de allí debe prestarse especial atención al huso o zona en la que se encuentra el punto de

interés, de modo que se eviten incongruencias al obtener coordenadas geográficas a partir de las planas (N, E).

4.3.2 Proyección cartesiana

El sistema de proyección cartesiana equivale a una representación conforme del elipsoide sobre un plano paralelo al tangente que rozaría al elipsoide en el punto origen $[\varphi_0, \lambda_0]$ (figura 4.3). La proyección del meridiano que pasa por este punto representa el eje de la coordenada Norte. No obstante, los puntos sobre el elipsoide y los equivalentes proyectados sobre el plano no tienen una relación geométrica, ésta es puramente matemática. La proyección cartesiana es utilizada para la elaboración de planos de ciudades (cartografía a escalas mayores que 1:5000), de allí, existen tantos orígenes de coordenadas cartesianas como ciudades o municipios. El plano de proyección se define sobre la altitud media de la comarca a representar.

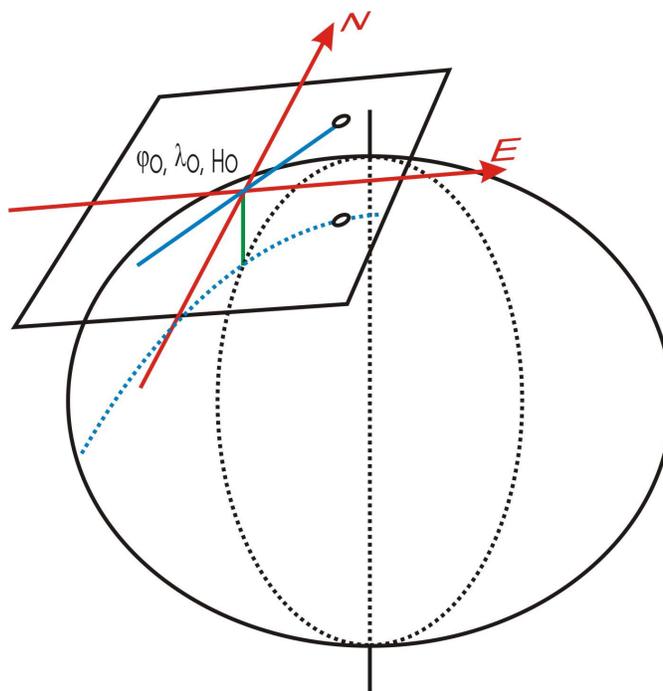


Figura 4.3 Proyección cartesiana

Al igual que en el sistema de Gauss-Krüger, la proyección cartesiana puede prestarse para ambigüedades en la definición unívoca de coordenadas, por tal razón, éstas siempre van acompañadas del origen al que se refieren.

5. CONVERSIÓN DE COORDENADAS

Los tipos de coordenadas expuestos anteriormente presentan relaciones geométricas entre sí que permiten el paso de uno a otro mediante formulaciones matemáticas rigurosas. No obstante, como estas coordenadas, exceptuando las cartesianas tridimensionales, dependen del elipsoide de referencia utilizado, es necesario tener claridad en los parámetros geométricos a utilizar. En el caso de Colombia, el elipsoide asociado al Datum BOGOTÁ es el Internacional de 1924 o de Hayford, mientras que para **MAGNA-SIRGAS** es el GRS80.

5.1 Constantes del elipsoide Internacional o de Hayford

El elipsoide asociado al Datum BOGOTÁ es el Internacional o de Hayford, el cual fue adoptado como elipsoide de referencia por la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG: International Union of Geodesy and Geophysics) en 1924. Sus constantes son:

Tabla 5.1. Constantes del elipsoide Internacional o de Hayford

Constante	Relación matemática	Valor
Semieje mayor (a)	Constante definida	$a = 6\,378\,388,000$ m
Aplanamiento recíproco ($1/f$)	Constante definida	$1/f = 297$
Primera excentricidad (e^2)	$e^2 = 2f - f^2$	$e^2 = 6,722\,670\,022\,33 \cdot 10^{-3}$
Segunda excentricidad (e'^2)	$e'^2 = \frac{f(2-f)}{(1-f)^2}$	$e'^2 = 6,768\,170\,197\,22 \cdot 10^{-3}$
Semieje menor (b)	$b = a(1-f)$	$b = 6\,356\,911,946\,13$ m

5.2 Constantes del elipsoide GRS80 (Geodetic Reference System, 1980)

El elipsoide GRS80 fue definido y adoptado oficialmente por la Asociación Internacional de Geodesia (AIG: International Association of Geodesy) de la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG: International Union of Geodesy and Geophysics) en 1979 (Moritz 2000). Éste es el elipsoide asociado al ITRS y por tanto, a SIRGAS y a MAGNA. En la práctica equivale al elipsoide WGS84. Sus constantes son:

Tabla 5.2 Constantes del elipsoide GRS80

Constante	Relación matemática	Valor
Semieje mayor (a)	Constante definida	$a = 6\,378\,137,000$ m
Constante gravitacional geocéntrica (GM)	Constante definida	$GM = 3\,896\,005 \cdot 10^8$ m ³ s ⁻²
Factor de aplanamiento dinámico (J_2)	Constante definida	$J_2 = 108\,263 \cdot 10^{-8}$
Velocidad angular de rotación (ω)	Constante definida	$\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{11}$ rad s ⁻¹
Primera excentricidad (e^2)	Cálculo iterativo a partir de a, GM, J_2, ω	$e^2 = 6,694\,380\,022\,90 \cdot 10^{-3}$
Segunda excentricidad (e'^2)	$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}$	$e'^2 = 6,739\,496\,775\,48 \cdot 10^{-3}$
Semieje menor (b)	$b = a\sqrt{1-e^2}$	$b = 6\,356\,752,314\,14$ m
Aplanamiento recíproco ($1/f$)	$f = \frac{a-b}{a}$	$1/f = 298,257\,222\,101$

5.3 Conversión entre coordenadas cartesianas tridimensionales [X, Y, Z] y elipsoidales [φ, λ, h]

Las coordenadas obtenidas mediante posicionamiento global por satélite corresponden con las cartesianas geocéntricas [X, Y, Z], cuya relación con las elipsoidales [φ, λ, h] corresponde con (figura 4.1) (Hofmann-Wellenhof et al. 1994):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ ((1-e^2)N+h)\sin\varphi \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Así mismo, las coordenadas elipsoidales [φ, λ, h] se derivan a partir de las geocéntricas [X, Y, Z] a través de:

$$\tan \varphi = \frac{Z + e^2 b \sin^3 \vartheta}{\sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 a \cos^3 \vartheta} ; \quad \tan \vartheta = \frac{Z a}{\sqrt{X^2 + Y^2} b} \quad (5.2a)$$

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X} \quad (5.2b)$$

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N \quad (5.2c)$$

siendo:

- a, b semiejes mayor y menor del elipsoide de referencia
- e^2, e'^2 primera y segunda excentricidad del elipsoide de referencia
- N radio de curvatura principal o gran normal:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (5.3)$$

5.4 Conversión entre coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$ y planas de Gauss-Krüger $[N, E]$

Las coordenadas planas de Gauss-Krüger $[N, E]$ se obtienen a partir de las coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda]$ mediante (figura 5.1) (Hofmann-Wellenhof et al. 1994):

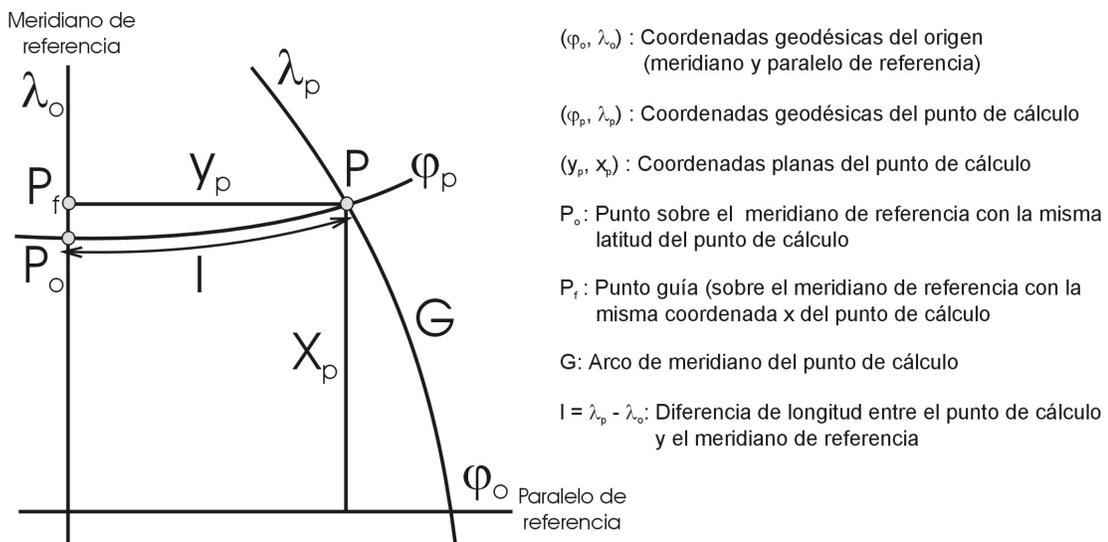


Figura 5.1. Coordenadas planas de Gauss-Krüger $[N, E]$ y elipsoidales $[\varphi, \lambda]$.

Coordenada Norte:

$$\begin{aligned}
 N = & 1000000,0 + (G(\varphi_p) - G(\varphi_0)) + \frac{t}{2} N l^2 \cos^2 \varphi_p \\
 & + \frac{t}{24} N \cos^4 \varphi_p (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) l^4 \\
 & + \frac{t}{720} N \cos^6 \varphi_p (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2 \eta^2) l^6 \\
 & + \frac{t}{40320} N \cos^8 \varphi_p (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) l^8 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.4a}$$

Coordenada Este:

$$\begin{aligned}
 E = & 1000000,0 + N l \cos \varphi_p \\
 & + \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi_p (1 - t^2 + \eta^2) l^3 \\
 & + \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi_p (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2 \eta^2) l^5 \\
 & + \frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi_p (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) l^7 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.4b}$$

donde N equivale a la ecuación 5.3 y $l = \lambda_p - \lambda_o$; $t = \tan \varphi_p$; $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_p$

Arco de meridiano del punto de cálculo $G(\varphi_p)$:

$$\begin{aligned}
 G(\varphi_p) = & \alpha [\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi + \varepsilon \sin 8\varphi + \dots] \\
 \alpha = & \frac{a+b}{2} \left(1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \dots \right) ; \quad \beta = -\frac{3}{2} n + \frac{9}{16} n^3 - \frac{3}{32} n^5 + \dots \\
 \gamma = & \frac{15}{16} n^2 - \frac{15}{32} n^4 + \dots ; \quad \delta = -\frac{35}{48} n^3 + \frac{105}{256} n^5 - \dots \\
 \varepsilon = & \frac{315}{512} n^4 + \dots ; \quad n = \frac{a-b}{a+b}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

siendo a, b, e^2, e'^2 las constantes del elipsoide de referencia. φ se expresa en radianes.

El cálculo de coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda]$ a partir de las planas de Gauss-Krüger $[N, E]$ se adelanta a través de:



Latitud:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \varphi_f + \frac{t_f}{2N_f^2}(-1-\eta_f^2)\Delta E^2 \\
 &+ \frac{t_f}{24N_f^4}(5+3t_f^2+6\eta_f^2-6t_f^2\eta_f^2-3\eta_f^4-9t_f^2\eta_f^4)\Delta E^4 \\
 &+ \frac{t_f}{720N_f^6}(-61-90t_f^2-45t_f^4-107\eta_f^2+162t_f^2\eta_f^2+45t_f^4\eta_f^2)\Delta E^6 \\
 &+ \frac{t_f}{40320N_f^8}(1385+3633t_f^2+4096t_f^4+1575t_f^6)\Delta E^8 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.6a}$$

Longitud:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \lambda_o + \frac{1}{N_f \cos \varphi_f} \Delta E + \frac{1}{6N_f^3 \cos \varphi_f} (-1-2t_f^2-\eta_f^2)\Delta E^3 \\
 &+ \frac{1}{120N_f^5 \cos \varphi_f} (5+28t_f^2+24t_f^4+6\eta_f^2+8t_f^2\eta_f^2)\Delta E^5 \\
 &+ \frac{1}{5040N_f^7 \cos \varphi_f} (-61-662t_f^2-1320t_f^4-720t_f^6)\Delta E^7 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.6b}$$

Latitud del punto guía (φ_f):

$$\begin{aligned}
 \varphi_f &= \frac{\Delta N}{\alpha} + \beta \sin \frac{2\Delta N}{\alpha} + \gamma \sin \frac{4\Delta N}{\alpha} + \delta \sin \frac{6\Delta N}{\alpha} + \varepsilon \sin \frac{8\Delta N}{\alpha} + \dots \\
 \alpha &= \frac{a+b}{2} \left(1 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{64}n^4 + \dots \right) ; \quad \beta = \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \frac{269}{512}n^5 + \dots \\
 \gamma &= \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4 + \dots ; \quad \delta = \frac{151}{96}n^3 - \frac{417}{128}n^5 - \dots \\
 \varepsilon &= \frac{1097}{512}n^4 + \dots ; \quad n = \frac{a-b}{a+b}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

siendo:

$$\Delta N = N - N'_o ; \quad \Delta E = E - E_o ; \quad t_f = \tan \varphi_f ; \quad \eta_f^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_f$$

donde a , b , e^2 , e'^2 son las constantes del elipsoide de referencia y N corresponde con la ecuación 5.3.

N'_o es la coordenada Norte para $\varphi = 0$ (plano ecuatorial), siendo para el Datum BOGOTA $N'_o = 491\ 447,16\ m$ y para **MAGNA-SIRGAS** $N'_o = 491\ 767,5344\ m$

5.5 Conversión entre coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$ y planas cartesianas $[N, E]$

El cálculo de coordenadas planas cartesianas $[N, E]$ a partir de elipsoidales $[\varphi, \lambda]$ corresponde con (León 2004):

$$N = M_{\varphi_o} \left[\Delta\varphi_{rad} + \frac{\tan \varphi_o \Delta\lambda_{rad}^2 N_{\varphi_o}^2 \cos^2 \varphi}{2 M_{\varphi_o} N_{\varphi_o}} \right] \times \left[1 + \frac{Pp}{M_{\varphi_m}} \right] + N_o \quad (5.8a)$$

$$E = \Delta\lambda_{rad} N_{\varphi} \cos \varphi \left[1 + \frac{Pp}{N_{\varphi_o}} \right] + E_o \quad (5.8b)$$

Igualmente, la conversión de coordenadas planas cartesianas $[N, E]$ a geodésicas $[\varphi, \lambda]$ está dada por:

$$\varphi = \varphi_o + \Delta\varphi \quad \lambda = \lambda_o + \Delta\lambda \quad (5.9a)$$

$$\Delta\varphi_{rad} = \frac{\Delta N}{\left[1 + \frac{Pp}{a(1-e^2)} \right] M_{\varphi_o}} - \left[\frac{\tan \varphi_o}{2 M_{\varphi_o} N_{\varphi_o}} \times \left(\frac{\Delta E}{1 + \frac{Pp}{a}} \right)^2 \right] \quad (5.9b)$$

$$\Delta\lambda_{rad} = \frac{\Delta E \cos \varphi}{N_{\varphi} \cos \varphi \left(1 + \frac{Pp}{a} \right)} \quad (5.9c)$$

siendo:

N, E : coordenadas cartesianas planas del punto de cálculo

N_o, E_o : origen del sistema de coordenadas cartesianas

$$\Delta N = N - N_o ; \Delta E = E - E_o$$

φ, λ : coordenadas geográficas del punto de cálculo

φ_o, λ_o : coordenadas geográficas del origen del sistema cartesiano



$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_o \ ; \ \Delta\lambda = \lambda - \lambda_o \ ; \ \varphi_m = (\varphi_o + \varphi) / 2$$

Pp : Altura del plano de proyección

a : semieje mayor del elipsoide de referencia

e^2 : primera excentricidad del elipsoide de referencia

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \ ; \ ; \ M = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

6. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

La conversión de coordenadas establece la relación matemática entre diferentes tipos de coordenadas referidas siempre al mismo datum, mientras que, el cambio de las coordenadas de un mismo punto referido a datum diferentes, se obtiene a través de la transformación de coordenadas. Dicha transformación puede hacerse utilizando coordenadas cartesianas o geográficas en dos o en tres dimensiones. Para el efecto, se derivan, empíricamente, los parámetros de transformación a partir de puntos comunes a los dos datum de interés. Si bien existen diferentes métodos para el cálculo y aplicación de parámetros de transformación, la metodología seleccionada por el IGAC se ha basado en los siguientes criterios:

- La transformación de coordenadas entre **MAGNA-SIRGAS** y Datum BOGOTÁ debe considerar la variación generada por las diferencias geométricas y de ubicación entre los elipsoides de referencia (GRS80 y el Internacional) y las causadas por las deformaciones implícitas en las redes clásicas.
- El modelo de transformación debe ser ampliamente usado, de modo que esté incluido en las aplicaciones comerciales que administran información georreferenciada (paquetes SIG, cartografía digital, etc.).
- La metodología de aplicación debe ser amigable, eficiente en la transformación de conjuntos grandes de datos y estándar para que todos los usuarios nacionales de la información espacial obtengan resultados coherentes entre sí.

Bajo estas consideraciones, la migración de la información georreferenciada en Datum BOGOTÁ a **MAGNA-SIRGAS** se fundamenta en el modelo de transformación tridimensional de similitud, incluyendo un refinamiento a través de una transformación bidimensional afín.

Dado que la precisión de los parámetros de transformación depende del área y del número de puntos disponibles en los dos sistemas de referencia, y teniendo presente que, debido a las distorsiones de la red geodésica clásica ARENA, los valores de dichos parámetros pueden variar significativamente de un lugar a otro, los parámetros para el modelo de transformación tridimensional de similitud se han determinado para ocho regiones diferentes en el país y son



aplicables npara la migración de información cartográfica a escalas pequeñas (1 : 3 000 000 ... 1 : 10 000). La transformación afin se utiliza para escalas cartográficas grandes (1 : 500 ... 1: 5 000) una vez se ha aplicado la transformación tridimensional. En el anexo 2 se ilustra un ejemplo numérico.

La adopción de **MAGNA-SIRGAS** como datum para Colombia estandarizará la producción de información espacial oficial referida a este sistema. No obstante, es posible que prevalezcan usuarios del sector privado que prefieran continuar con su información geográfica asociada al Datum BOGOTÁ. En estos casos, sería conveniente que ellos aplicaran los parámetros de transformación oficiales del IGAC para llevar, al datum antiguo, la información generada sobre el nuevo sistema.

6.1 Modelo de transformación tridimensional de similitud

Éste cuantifica el cambio de las coordenadas causado por las diferencias de posición y tamaño (componente sistemática) de los elipsoides asociados al sistema **MAGNA-SIRGAS** y al Datum BOGOTÁ. Se basa en coordenadas cartesianas tridimensionales considerando tres parámetros de traslación $[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T$, tres de rotación $[R_x, R_y, R_z]^T$ y un factor de escala (λ) (figura 6.1). Dado que el factor de escala es el mismo en todas las direcciones, se denomina transformación de similitud o lineal conforme, es decir, los ángulos (formas) se mantienen después de la transformación, pero las extensiones y posiciones de las líneas cambian. Este método originalmente se conoce como transformación de similitud de Helmert, pero dadas algunas variaciones en su determinación también se habla de los modelos Molodensky-Badekas y Bursa-Wolf. La formulación matemática correspondiente se presenta en la ecuación 6.1.

$$\begin{bmatrix} X_{MAGNA} \\ Y_{MAGNA} \\ Z_{MAGNA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1 + \lambda) \begin{bmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{BOGOTA} \\ Y_{BOGOTA} \\ Z_{BOGOTA} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

siendo:

$[X_{MAGNA}, Y_{MAGNA}, Z_{MAGNA}]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto de cálculo referidas (transformadas) a **MAGNA-SIRGAS**

$[X_{BOGOTA}, Y_{BOGOTA}, Z_{BOGOTA}]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto de cálculo referidas al Datum BOGOTÁ

$[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T$: Parámetros de traslación

$[R_x, R_y, R_z]^T$: Parámetros de rotación

λ : Factor de escala



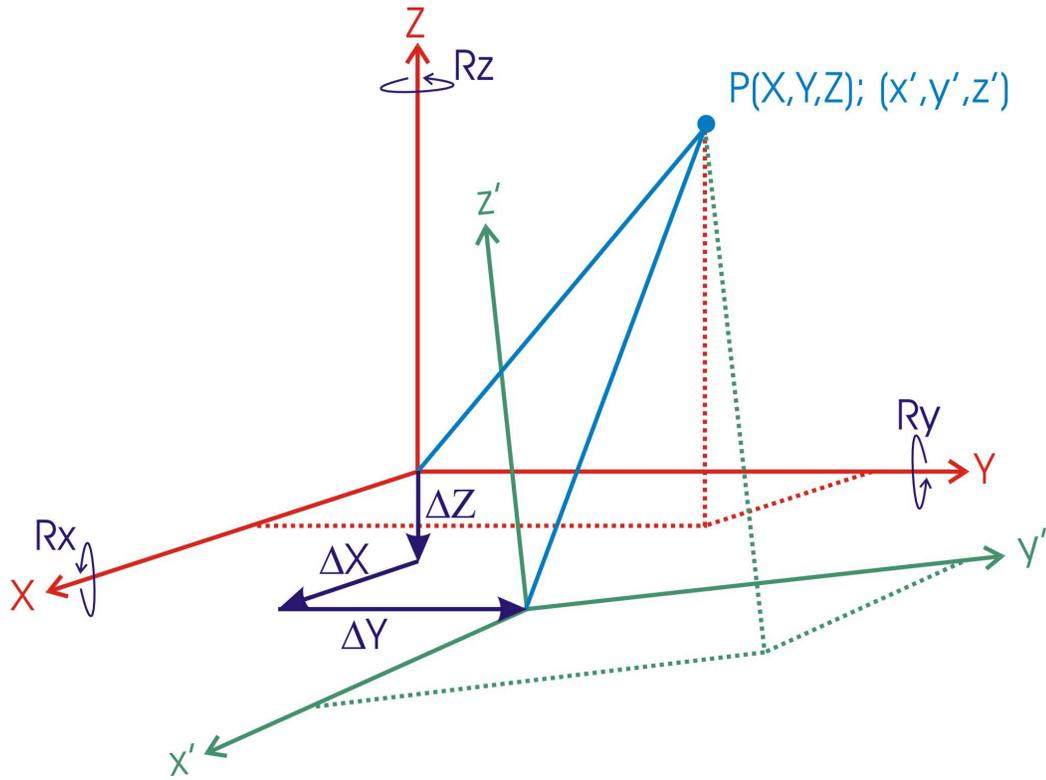


Figura 6.1 Transformación tridimensional de siete parámetros.

La altura elipsoidal [h] utilizada para la conversión de coordenadas geográficas [ϕ , λ] a coordenadas geocéntricas [X, Y, Z] sobre el Datum BOGOTÁ se obtiene utilizando el modelo geoidal GEOCOL y la relación matemática:

$$h = H + N \quad (6.2)$$

La utilización de la relación 6.2 es de muy baja precisión para la definición de alturas elipsoidales, ya que genera una incertidumbre de $\sim \pm 3$ m dada la inexactitud, en este mismo orden, tanto de N como de H. No obstante, ésta se prefiere a la sustitución de las alturas elipsoidales por la niveladas, dado que se introducirían errores de la magnitud de las ondulaciones geoidales en Colombia ($\sim -30 \dots \sim +30$ m).

Los parámetros de transformación para cada región en Colombia (figura 6.2) han sido calculados mediante compensación por mínimos cuadrados considerando los puntos comunes a los dos sistemas disponibles en cada zona. Los valores obtenidos se presentan en la tabla 6.1.

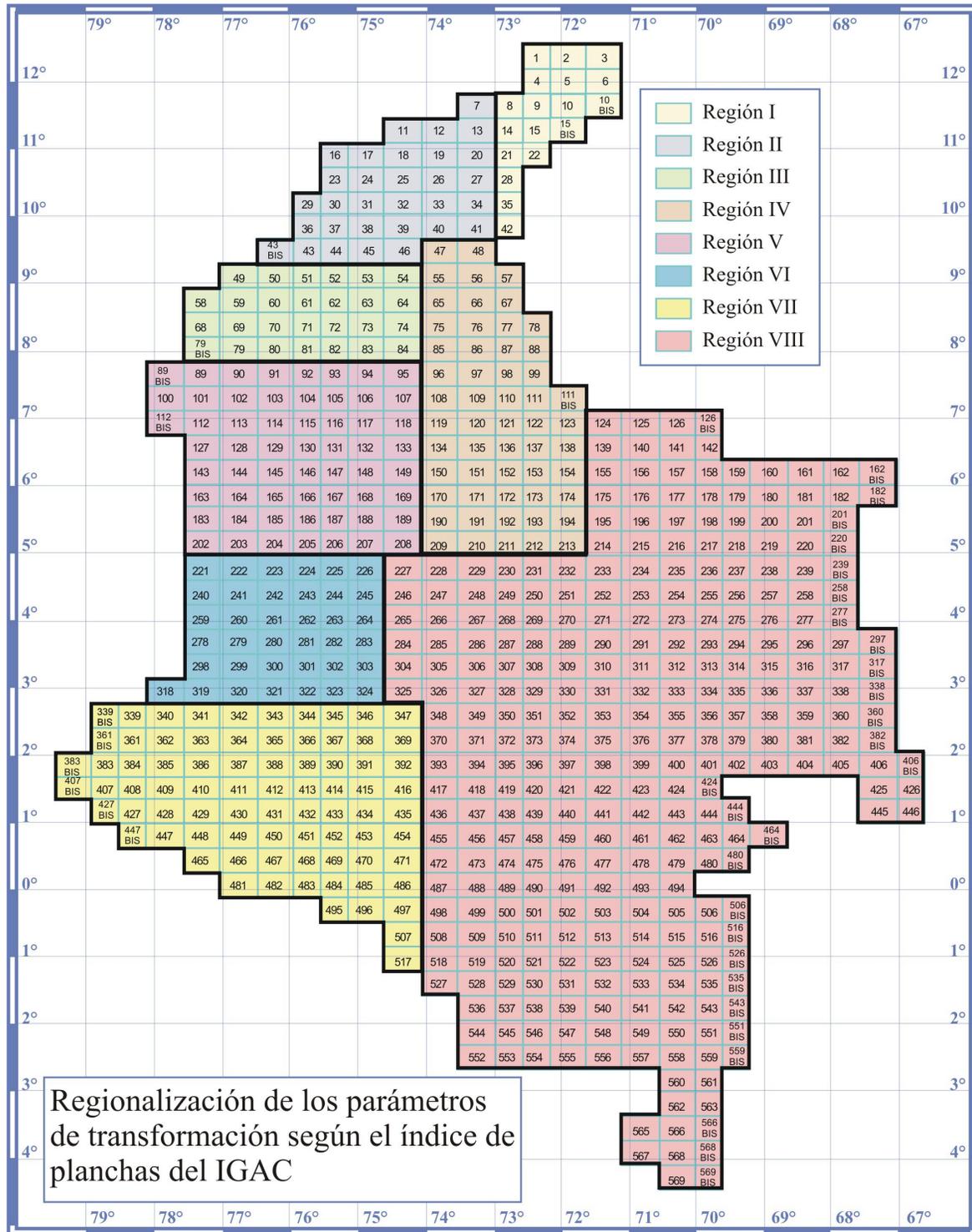


Figura 6.2 Regionalización de los parámetros de transformación en Colombia según el índice de planchas del IGAC



Tabla 6.1 Parámetros regionales de transformación, según el método de Helmert, para migrar información georreferenciada en Datum BOGOTÁ al sistema MAGNA-SIRGAS.

Parámetro	Región			
	I $\varphi = 10,0 \dots 13,0 \text{ N}$ $\lambda = 73,0 \dots 71,0 \text{ W}$	II $\varphi = 9,4 \dots 11,6 \text{ N}$ $\lambda = 76,0 \dots 73,0 \text{ W}$	III $\varphi = 8,0 \dots 9,4 \text{ N}$ $\lambda = 77,6 \dots 74,4 \text{ W}$	IV $\varphi = 5,0 \dots 9,4 \text{ N}$ $\lambda = 74,4 \dots 72,0 \text{ W}$
ΔX [m]	-806,413	100,783	336,026	963,273
ΔY [m]	-263,500	187,382	348,565	486,386
ΔZ [m]	-622,671	-47,000	252,978	190,997
λ	-2,081 616 E-05	-1,356 561 E-05	-5,771 909 E-06	-1,389 914 E-05
Rx [rad]	6,018 583 E-05	-4,471 839 E-05	-8,358 813 E-05	-7,992 171 E-05
Ry [rad]	-1,450 001 E-05	1,175 093 E-05	-3,057 474 E-05	-8,090 696 E-06
Rz [rad]	-1,892 455 E-04	-4,027 967 E-05	7,573 031 E-06	1,051 699 E-04

Parámetro	Región			
	V $\varphi = 5,0 \dots 8,0 \text{ N}$ $\lambda = 78,0 \dots 74,4 \text{ W}$	VI $\varphi = 3,0 \dots 5,0 \text{ N}$ $\lambda = 78,0 \dots 74,4 \text{ W}$	VII $\varphi = 1,0 \text{ S} \dots 3,0 \text{ N}$ $\lambda = 79,0 \dots 74,0 \text{ W}$	VIII $\varphi = 4,5 \text{ S} \dots 3,0 \text{ N}$ $\lambda = 74,0 \dots 66,5 \text{ W}$ $\varphi = 3,0 \dots 5,0 \text{ N}$ $\lambda = 74,4 \dots 66,5 \text{ W}$ $\varphi = 5,0 \dots 7,3 \text{ N}$ $\lambda = 72,0 \dots 66,5 \text{ W}$
ΔX [m]	-90,290	-0,562	-305,356	221,899
ΔY [m]	247,559	244,299	222,004	274,136
ΔZ [m]	-21,989	-456,938	-30,023	-397,554
λ	2,181 658 E-06	3,746 560 E-06	6,325 747 E-06	-2,199 943 E-06
Rx [rad]	-4,216 369 E-05	3,329 153 E-05	-4,698 084 E-05	1,361 573 E-05
Ry [rad]	-2,030 416 E-05	-4,001 009 E-05	5,003 123 E-06	-2,174 431 E-06
Rz [rad]	-6,209 623 E-05	-4,507 206 E-05	-9,578 655 E-05	-1,362 410 E-05

6.2 Modelo Molodensky-Badekas

En redes geodésicas pequeñas en extensión con coordenadas geocéntricas, se presenta una correlación muy alta entre los parámetros de rotación y translación en el método de Helmert, por tal razón, se acostumbra a calcular los parámetros de transformación en función de las coordenadas del punto central del área. Esta estrategia se conoce como el método Molodensky-Badekas. Su formulación matemática corresponde con (Collier et al. 1998):

$$\begin{bmatrix} X_{MAGNA} \\ Y_{MAGNA} \\ Z_{MAGNA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1 + \lambda) \begin{bmatrix} 1 & Rz & -Ry \\ -Rz & 1 & Rx \\ Ry & -Rx & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{BOGOTA} - X_0 \\ Y_{BOGOTA} - Y_0 \\ Z_{BOGOTA} - Z_0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

siendo:

$[X_{MAGNA}, Y_{MAGNA}, Z_{MAGNA}]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto de cálculo referidas (transformadas) a **MAGNA-SIRGAS**

$[X_0, Y_0, Z_0]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto central

$[X_{BOGOTA}, Y_{BOGOTA}, Z_{BOGOTA}]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto de cálculo referidas al Datum BOGOTÁ

$[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T$: Parámetros de translación

$[Rx, Ry, Rz]^T$: Parámetros de rotación

λ : Factor de escala

Los parámetros correspondientes a esta formulación fueron calculados con los mismos puntos que sirvieron para la determinación del método expuesto en 6.1. Los valores obtenidos se presentan en la tabla 6.2.

Tabla 6.2 Parámetros regionales de transformación, según el modelo Molodensky-Badekas, para migrar información georreferencia en Datum BOGOTÁ al sistema **MAGNA-SIRGAS**.

Parámetro	Región			
	I $\varphi = 10,0 \dots 13,0$ N $\lambda = 73,0 \dots 71,0$ W	II $\varphi = 9,4 \dots 11,6$ N $\lambda = 76,0 \dots 73,0$ W	III $\varphi = 8,0 \dots 9,4$ N $\lambda = 77,6 \dots 74,4$ W	IV $\varphi = 5,0 \dots 9,4$ N $\lambda = 74,4 \dots 72,0$ W
ΔX [m]	300,449	308,833	311,118	306,666
ΔY [m]	293,757	282,519	289,167	315,063
ΔZ [m]	-317,306	-314,571	-310,641	-318,837
λ	-2,081 615 E-05	-1,356 561 E-05	-5,771 882 E-06	-1,389 912 E-05
Rx [rad]	6,018 581 E-05	-4,471 845 E-05	-8,358 815 E-05	-7,992 173 E-05
Ry [rad]	-1,450 002 E-05	1,175 087 E-05	-3,057 474 E-05	-8,090 698 E-06
Rz [rad]	-1,892 455 E-04	-4,027 981 E-05	7,573 043 E-06	1,051 699 E-04
X_0 [m]	1 891 881,173	1 625 036,590	1 555 622,801	1 845 222,398
Y_0 [m]	-5 961 263,267	-6 054 644,061	-6 105 353,313	-6 058 604,495
Z_0 [m]	1 248 403,057	1 172 969,151	991 255,656	769 132,398



Parámetro	Región			
	V $\varphi = 5,0 \dots 8,0 \text{ N}$ $\lambda = 78,0 \dots 74,4 \text{ W}$	VI $\varphi = 3,0 \dots 5,0 \text{ N}$ $\lambda = 78,0 \dots 74,4 \text{ W}$	VII $\varphi = 1,0 \text{ S} \dots 3,0 \text{ N}$ $\lambda = 79,0 \dots 74,0 \text{ W}$	VIII $\varphi = 4,5 \text{ S} \dots 3,0 \text{ N}$ $\lambda = 74,0 \dots 66,5 \text{ W}$ $\varphi = 3,0 \dots 5,0 \text{ N}$ $\lambda = 74,4 \dots 66,5 \text{ W}$ $\varphi = 5,0 \dots 7,3 \text{ N}$ $\lambda = 72,0 \dots 66,5 \text{ W}$
ΔX [m]	307,871	302,934	295,282	302,529
ΔY [m]	305,803	307,805	321,293	317,979
ΔZ [m]	-311,992	-312,121	-311,001	-319,080
λ	2,181 655 E-06	3,746 562 E-06	6,325 744 E-06	-2,199 976 E-06
Rx [rad]	-4,216 368 E-05	3,329 153 E-05	-4,698 084 E-05	1,361 566 E-05
Ry [rad]	-2,030 416 E-05	-4,001 009 E-05	5,003 127 E-06	-2,174 456 E-06
Rz [rad]	-6,209 624 E-05	-4,507 205 E-05	-9,578 653 E-05	-1,362 418 E-05
Xo [m]	1 594 396,206	1 558 280,49	1 564 000,62	1 738 580,767
Yo [m]	-6 143 812,398	-6 167 355,092	-6 180 004,879	-6 120 500,388
Zo [m]	648 855,829	491 954,2193	243 257,9554	491 473,3064

La diferencia entre las coordenadas geocéntricas transformadas por el método de Helmert o el de Molodensky-Badekas es del orden de milímetros. En el presente documento, se exponen ambos, dado que en los paquetes informáticos para la administración de datos espaciales se ofrece uno de las dos.

En general, los valores de translación están en el orden de la magnitud de las deflexiones de la vertical del punto datum (pilastra sur del Observatorio Astronómico de Bogotá); éstos son grandes ya que el elipsoide de referencia utilizado (Internacional de 1924) no es muy cercano al geoide, su radio ecuatorial excede, en 250 m, a aquel elipsoide que mejor se ajusta al tamaño del geoide (GRS80). Los ángulos de rotación reflejan la precisión de las observaciones astronómicas, dada sus magnitudes tan pequeñas podrían obviarse y asumirse paralelismo entre los ejes coordenados de los sistemas de referencia **MAGNA-SIRGAS** y Datum BOGOTÁ. Finalmente, el factor de escala en las secciones antiguas de la red alcanza 10^{-5} , mientras que para las partes más recientes su valor varía en torno a 10^{-6} , lo que refleja los avances técnicos en la medición de distancias.

6.3 Transformación bidimensional afín

Como se mencionó anteriormente, el método de transformación de similitud (Helmert o Molodensky-Badekas) se preocupa por transformar una figura de un marco de referencia a otro, sin alterar su forma (figura 6.3a). Sin embargo, dadas las características de las redes clásicas, muchas veces es conveniente complementar la transformación, de modo tal que la

forma del objeto o red transformada sea refinada mediante un modelo matemático suplementario que minimice las distorsiones existentes y que mejore la precisión de las coordenadas resultantes (figura 6.3b). Esta metodología es de especial utilidad en cartografía urbana y mapas catastrales, tanto en formato análogo como en digital.

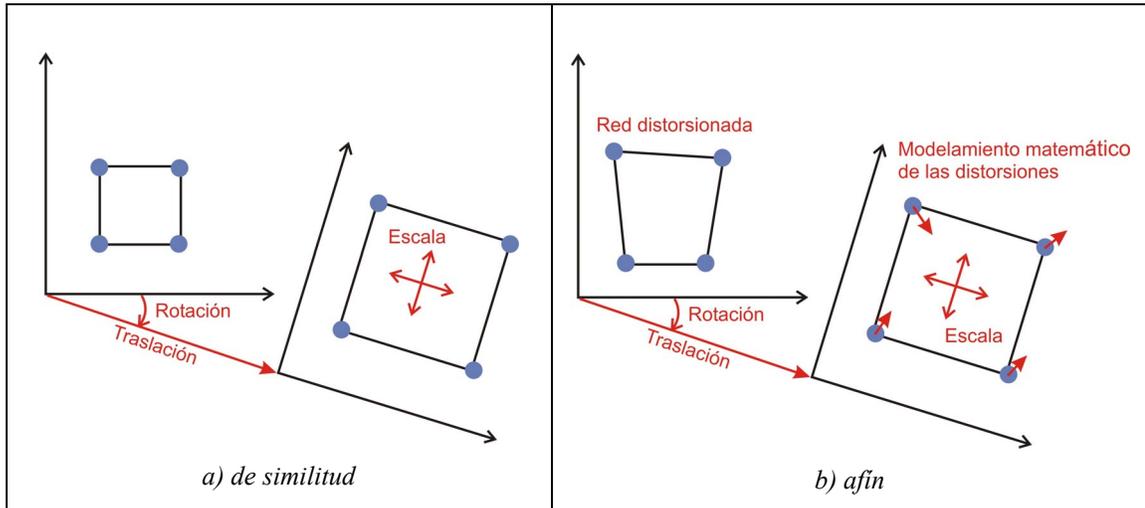


Figura 6.3 Transformación bidimensional (Collier et al. 1998)

En este sentido, con el propósito de refinar la migración a **MAGNA-SIRGAS** de la información referida al Datum BOGOTÁ, una vez se ha aplicado el modelo de similitud (Helmert o Molodensky-Badekas), se adelanta una transformación afin de seis parámetros, calculada con coordenadas planas (Gauss-Krüger o cartesianas). El modelo matemático correspondiente equivale a:

$$E = (k \cos \alpha) E' + (l \sin \beta) N' + c \quad (6.4a)$$

$$N = -(k \sin \alpha) E' + (l \cos \beta) N' + f \quad (6.4b)$$

siendo:

[N', E']: Coordenadas planas (Gauss-Krüger o cartesianas) calculadas con la latitud (φ) y longitud (λ) transformadas al utilizar los parámetros Molodensky-Badekas

[N, E]: Coordenadas planas (Gauss-Krüger o cartesianas) refinadas.

Las ecuaciones (6.4a) y (6.4b) pueden escribirse como:

$$E = a E' + b N' + c \quad (6.5a)$$

$$N = -d E' + e N' + f \quad (6.5b)$$

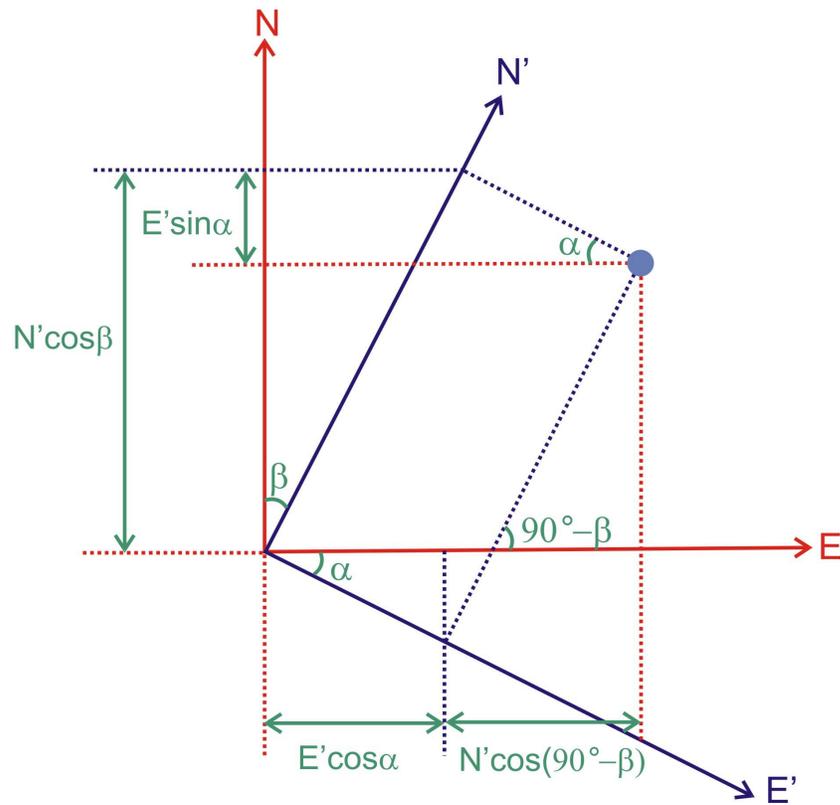


Figura 6.4 Transformación afín de seis parámetros

De esta forma, los parámetros calculados (a, b, c, d, e y f) permiten conocer las traslaciones, rotaciones y cambios en el factor de escala sobre los ejes N, E (figura 6.4), mediante:

$$k = (a^2 + d^2)^{1/2} \quad (6.5a) \quad \alpha = \arctan(d/a) \quad (6.6c)$$

$$l = (b^2 + e^2)^{1/2} \quad (6.5b) \quad \beta = \arctan(b/e) \quad (6.6d)$$

La transformación afín se calcula para áreas pequeñas, como por ejemplo ciudades o municipios; por tal razón, existen tantos conjuntos de parámetros como zonas individuales de análisis.

6.4 Transformación bidimensional a partir de coordenadas elipsoidales

En caso dado de que el conjunto de datos que se desea transformar no cuente con la componente vertical (altura elipsoidal o sobre el nivel medio del mar), no será posible determinar las coordenadas rectangulares tridimensionales y las formulaciones de Helmert o Molodensky-Badekas no serán aplicables. Como alternativa, se presenta una transformación bidimensional a partir de coordenadas elipsoidales, la cual ofrece

precisiones similares y, al igual que éstas, deberá ser refinada mediante la transformación bidimensional afin (anexo2). La formulación matemática corresponde con (Torge 2001):

$$\begin{aligned} \delta\varphi = & (\cos \varphi_F \cos \varphi + \sin \varphi_F \sin \varphi \cos(\lambda - \lambda_F)) \delta\varphi_F \\ & - \sin \varphi \sin(\lambda - \lambda_F) \cos \varphi_F \delta\lambda_F + \\ & (\sin \varphi_F \cos \varphi - \cos \varphi_F \sin \varphi \cos(\lambda - \lambda_F)) \\ & \times \left(\frac{dh_F}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2 \varphi_F df \right) + 2 \cos \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_F) df \end{aligned} \quad (6.7a)$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda = & \sin \varphi_F \sin(\lambda - \lambda_F) \frac{\delta\varphi_F}{\cos \varphi} \\ & + \cos(\lambda - \lambda_F) \cos \varphi_F \frac{\delta\lambda_F}{\cos \varphi} \\ & - \cos \varphi_F \sin(\lambda - \lambda_F) \left(\frac{dh_F}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2 \varphi_F df \right) \left(\frac{1}{\cos \varphi} \right) \end{aligned} \quad (6.7b)$$

siendo:

$\delta\varphi_F$, $\delta\lambda_F$: Parámetros de transformación del datum BOGOTÁ a **MAGNA-SIRGAS** (tabla 6.3). Estos valores han sido calculados por el IGAC utilizando los mismos puntos con los que se han estimado los parámetros del modelo Molodensky-Badekas.

$\delta\varphi$, $\delta\lambda$: Cambios en latitud y longitud del punto de cálculo al ser transformado del Datum BOGOTÁ a **MAGNA-SIRGAS**.

φ_F , λ_F : Coordenadas del punto datum (Observatorio Astronómico de Bogotá) en Datum BOGOTÁ.

φ , λ : Coordenadas en Datum BOGOTÁ del punto que se desea transformar.

dh_F : Diferencia de las alturas elipsoidales del punto datum (Observatorio Astronómico de Bogotá) sobre MAGNA SIRGAS y el Datum BOGOTÁ. Dado que estas alturas se asumen idénticas, $dh_F = 0$.

da : Diferencia entre el semieje mayor del elipsoide asociado a **MAGNA-SIRGAS** (GRS80), menos el del elipsoide asociado al Datum BOGOTÁ (Internacional).

df : Diferencia entre el aplamamiento del elipsoide asociado a **MAGNA-SIRGAS** (GRS80), menos el del elipsoide asociado al Datum BOGOTÁ.

a : Semieje mayor del elipsoide del datum geocéntrico, es decir **MAGNA-SIRGAS** (GRS80)

Las coordenadas del punto de cálculo en **MAGNA-SIRGAS** (φ' , λ') están dadas por:

$$\varphi' = \varphi + \delta\varphi \quad ; \quad \lambda' = \lambda + \delta\lambda \quad (6.8)$$

Tabla 6.3 Parámetros regionales de transformación, utilizando coordenadas elipsoidales, para migrar información georreferencia en Datum BOGOTÁ al sistema **MAGNA-SIRGAS**.

Zona	Cobertura		Parámetros de transformación de Datum BOGOTÁ a MAGNA-SIRGAS	
	φ	λ	$\delta\varphi_F$ ["]	$\delta\lambda_F$ ["]
I	10,0 ... 13,0 N	73,0 ... 71,0 W	-9,866	12,405
II	9,4 ... 11,6 N	76,0 ... 73,0 W	-9,879	12,190
III	8,0 ... 9,4 N	77,6 ... 74,4 W	-9,838	12,199
IV	5,0 ... 9,4 N	74,4 ... 72,0 W	-10,085	12,561
V	5,0 ... 8,0 N	78,0 ... 74,4 W	-9,946	12,159
VI	3,0 ... 5,0 N	78,0 ... 74,4 W	-10,023	11,969
VII	1,0 S ... 3,0 N	79,0 ... 74,0 W	-10,038	11,731
VIII	4,5 S ... 3,0 N	74,0 ... 66,5 W	-10,249	12,272
	3,0 ... 5,0 N	74,4 ... 66,5 W		
	5,0 ... 7,3 N	72,0 ... 66,5 W		

7. ADOPCIÓN DE **MAGNA-SIRGAS** COMO SISTEMA DE REFERENCIA OFICIAL PARA COLOMBIA

La presente sección describe las diferentes medidas y recomendaciones emanadas del IGAC, que buscan reemplazar definitivamente al Datum BOGOTÁ con **MAGNA-SIRGAS**, de modo que el sistema de referencia nacional sea compatible con los avances científicos y tecnológicos que definen *el estado del arte* actual en georreferenciación.

7.1 Generación de información oficial georreferenciada en **MAGNA-SIRGAS**

Dadas las consideraciones técnicas expuestas a lo largo de este documento, el IGAC ha decidido generar su información geográfica, cartográfica, catastral y agrológica apoyándose en **MAGNA-SIRGAS** como plataforma de georreferenciación. El mayor impacto de esta decisión repercute en la cartografía básica, pues dado que a partir de ésta se ubican espacialmente los datos específicos de las áreas temáticas, una vez la cartografía básica sea producida o migrada a **MAGNA-SIRGAS**, la información generada por las otras áreas será actualizada fácilmente.



Si bien las proyecciones Gauss-Krüger (sección 5.4) y Cartesiana (sección 5.5) se mantienen, sus expresiones matemáticas son evaluadas con las constantes del elipsoide GRS80 (tabla 5.2) y las coordenadas de los orígenes definidas sobre **MAGNA-SIRGAS** (tabla 4.1 para la proyección Gauss-Krüger). En este sentido, es necesario aclarar que los orígenes de proyección, tanto para las coordenadas Gauss-Krüger como para las cartesianas, físicamente permanecen en el mismo lugar y los valores de sus coordenadas planas no se modifican; las variaciones se presentan en las coordenadas elipsoidales al ser éstas referidas a **MAGNA-SIRGAS** y no al Datum BOGOTÁ.

El calcular las proyecciones cartográficas directamente sobre el elipsoide GRS80 utilizando coordenadas elipsoidales referidas a **MAGNA-SIRGAS** evita el proceso de transformación de datum, garantizando la continuidad de la precisión del posicionamiento GPS adelantado en campo, la cual necesariamente se ve comprometida desfavorablemente al representar estos levantamientos en cartografía referida al datum antiguo.

En consecuencia, a partir de enero de 2004, toda la cartografía básica nueva generada por el IGAC está referida a **MAGNA-SIRGAS**.

7.2 Migración a **MAGNA-SIRGAS** de la información espacial en formato digital referenciada en Datum BOGOTÁ

El almacenamiento y administración digital de datos espaciales facilita su migración al sistema **MAGNA-SIRGAS**, ya que sus coordenadas pueden ser transformadas matemáticamente siguiendo el proceso descrito en la sección 6 del presente documento.

A modo experimental, se ha evaluado el control de precisión, tanto de la cartografía referenciada en Datum BOGOTÁ, como de su equivalente transformada a **MAGNA-SIRGAS** de algunas planchas digitales a escala 1:1000 de la Ciudad de Bogotá. El objetivo central es determinar si dicho control de precisión desmejora en sus indicadores estadísticos al utilizar la metodología de transformación propuesta. El procedimiento se desarrolla a través de la comparación de las coordenadas cartesianas de 25 puntos identificados sobre la cartografía y posicionados directamente en campo. A partir de las coordenadas cartesianas (N, E) extraídas de las planchas vinculadas al Datum BOGOTÁ se aplica la metodología de transformación de datum, se calculan las coordenadas cartesianas equivalentes referidas a **MAGNA-SIRGAS**, se comparan con las obtenidas directamente en terreno mediante posicionamiento GPS y se adelanta el procedimiento de *Cálculo de Exactitud* que desarrolla la División de Fotogrametría para evaluar la precisión de la cartografía producida por la Subdirección de Geografía y Cartografía. La evaluación de la precisión se ha realizado para la información original en Datum BOGOTÁ y para las coordenadas elipsoidales y cartesianas transformadas a **MAGNA-SIRGAS**.

En términos generales, los indicadores estadísticos se mantienen dentro de los mismos rangos (tabla 7.1), las mayores diferencias (3 cm) se presentan en el máximo error permitido, el cual es una función del valor más probable del error (media) y su desviación



estándar, cuyos valores, para la prueba realizada en Datum BOGOTÁ y su equivalente migrada a **MAGNA-SIRGAS**, sólo difieren en 1 cm. Los demás indicadores presentan como discrepancia este mismo valor, cuya representación gráfica equivaldría a 5×10^{-6} m, cantidad completamente despreciable.

Tabla 7.1 Comparación de los indicadores estadísticos obtenidos de las pruebas de exactitud para las coordenadas cartesianas y elipsoidales referidas a Datum BOGOTÁ y sus equivalentes transformadas a **MAGNA-SIRGAS**.

Indicador estadístico	Cálculo de exactitud de la cartografía en Datum BOGOTÁ	Cálculo de exactitud de la cartografía transformada a MAGNA-SIRGAS	Cálculo de exactitud de las coordenadas elipsoidales transformadas
Tamaño de la muestra [número de puntos]	25	25	25
Media [m]	0,27	0,27	0,26
Error medio cuadrático [m]	0,35	0,36	0,36
Desviación estándar [m]	0,24	0,25	0,25
Error estándar [m]	0,05	0,06	0,06
Máximo error permitido [m]	0,99	1,02	1,00
Intervalo de confianza para un 90% [m]	0,34	0,34	0,33

Si bien los datos estadísticos presentados muestran una descripción cuantitativa de las discrepancias entre las coordenadas analizadas, el comportamiento cualitativo de las mismas no es muy evidente. Para el efecto, la figura 7.1 presenta los vectores de divergencia entre las coordenadas leídas en la cartografía con las determinadas directamente en terreno. Las líneas continuas representan las divergencias para las coordenadas referidas a Datum BOGOTÁ y las discontinuas para las coordenadas del plano transformadas a **MAGNA-SIRGAS**.

Los puntos con mayor dispersión (CC-19, CC-18, CC-03, CC-05, CC-14, CC-17) se mantienen en los dos sistemas de referencia, es decir que la discrepancia de sus coordenadas proviene ya sea de la cartografía o de su determinación en campo, más no por ser migrados del Datum BOGOTÁ a **MAGNA-SIRGAS**. De manera similar, se observa para los demás puntos que, aunque la dirección de los vectores de divergencia varía, las magnitudes de éstos se mantienen mas o menos estables.

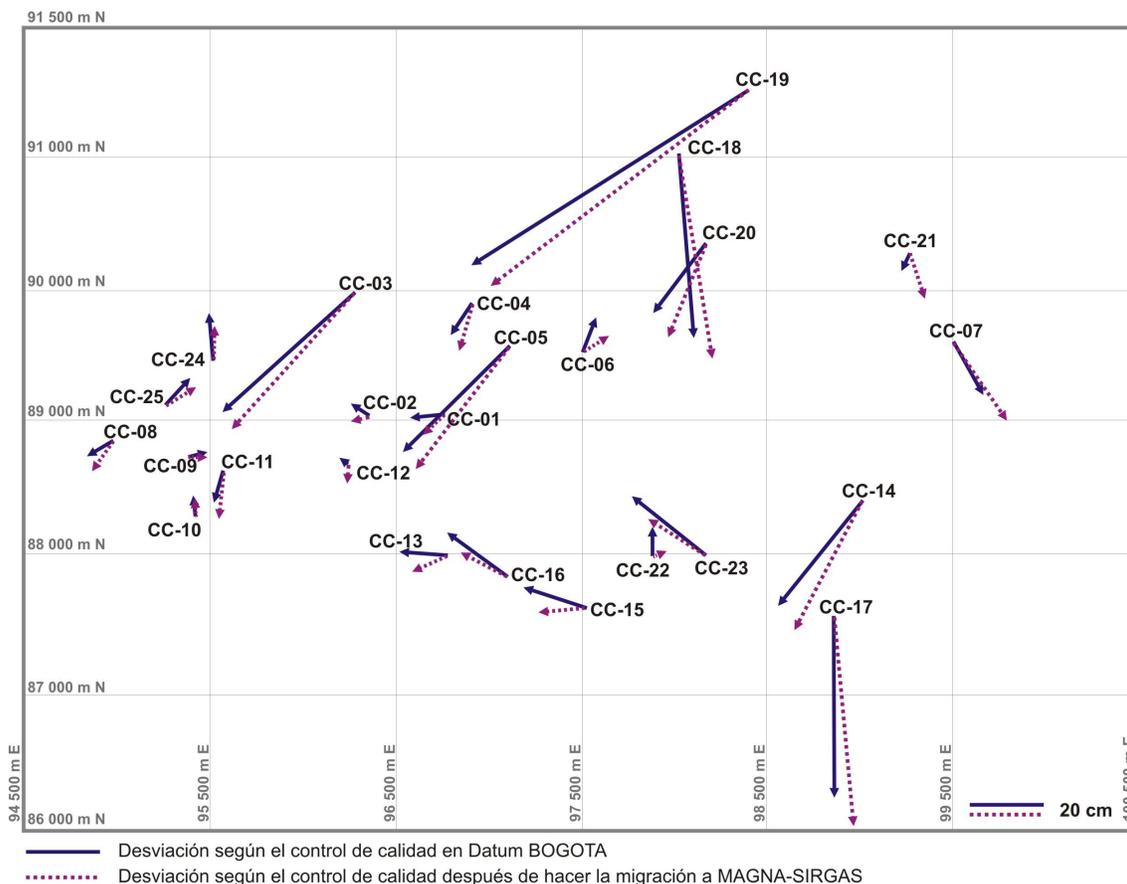


Figura 7.1 Vectores de discrepancia entre las coordenadas cartesianas extraídas de la cartografía y sus equivalentes determinadas en terreno, tanto para la información original en Datum BOGOTÁ, como para su equivalente migrada a **MAGNA-SIRGAS** mediante los parámetros de transformación del IGAC.

Se esperaría que las diferencias de los vectores dibujados fuesen sistemáticas, lo que reflejaría la influencia desfavorable de los parámetros de transformación utilizados para migrar la cartografía del Datum BOGOTÁ a **MAGNA-SIRGAS**, pero dado que éste no es el caso; se podría concluir que la discordancia entre los vectores presentados incluyen, además de las diferencias meramente geométricas entre las coordenadas cartesianas calculadas con parámetros del Datum BOGOTÁ y de **MAGNA-SIRGAS**, también los errores implícitos en el proceso cartográfico desde el fotocontrol, pasando por la aerotriangulación, la restitución, la edición y la salida final correspondiente. Desde este punto de vista, puede confirmarse la validez de la metodología propuesta para migrar a **MAGNA-SIRGAS** la cartografía y demás datos espaciales en formato digital aún referidos al Datum BOGOTÁ.

7.3 Tratamiento de la cartografía impresa referida al Datum BOGOTÁ

La transformación matemática de coordenadas para ir de un datum a otro suple la necesidad correspondiente para los datos espaciales digitales (cartografía digital, sistemas

de información geográfica, bancos de datos espaciales, etc.) y para las redes geodésicas o topográficas. No obstante, la adopción oficial de **MAGNA-SIRGAS** repercutirá especialmente en la información geográfica presentada en papel, comúnmente llamada *en copia dura*.

La magnitud visual de la discrepancia existente entre el Datum BOGOTÁ y **MAGNA-SIRGAS** (~ 500 m) depende de la escala a la cual están representados los datos espaciales que, según la tabla 7.2, se ven altamente afectados para escalas mayores que 1 : 250 000.

Tabla 7.2 Efecto, en diferentes escalas, de los 500 m de discrepancia entre el Datum BOGOTÁ y **MAGNA-SIRGAS**

Escala	Desplazamiento
1 : 1 000	500,0 mm
1 : 2 000	250,0 mm
1 : 10 000	50,0 mm
1 : 25 000	20,0 mm
1 : 50 000	10,0 mm
1 : 100 000	5,0 mm
1 : 250 000	2,0 mm
1 : 500 000	1,0 mm
1 : 1 500 000	0,3 mm

Teniendo presente los costos económicos y en tiempo que demanda la nueva generación en **MAGNA-SIRGAS** de la totalidad de la cartografía básica existente en papel, el IGAC presenta una alternativa que, a mediano plazo, minimiza la inconveniencia de representar levantamientos apoyados en técnicas GNSS sobre la cartografía existente.

7.3.1 Manejo de coordenadas elipsoidales [φ , λ] sobre cartografía impresa

La relación entre las coordenadas elipsoidales extraídas de la cartografía impresa en Datum BOGOTÁ y sus equivalentes referidas a **MAGNA-SIRGAS**, puede representarse mediante:

$$\varphi_{MAGNA-SIRGAS} = \varphi_{mapa} + \Delta\varphi ; \lambda_{MAGNA-SIRGAS} = \lambda_{mapa} + \Delta\lambda \quad (7.1)$$

Los valores $\Delta\varphi$ y $\Delta\lambda$ (tabla 6.3) han sido calculados regionalmente (figura 6.2) mediante ajuste por mínimos cuadrados a partir de los puntos geodésicos utilizados para la determinación de los parámetros del modelo de transformación Molodensky-Badekas.

7.3.2 Manejo de coordenadas planas [N, E] Gauss-Krüger o Cartesianas sobre cartografía impresa

Las coordenadas planas representadas en la cartografía impresa del IGAC han sido calculadas utilizando los parámetros del Elipsoide Internacional (tabla 5.1) y las coordenadas elipsoidales de los orígenes referidas al Datum BOGOTÁ (tabla 4.2 para la proyección Gauss-Krüger). Sin embargo, la adopción oficial de **MAGNA-SIRGAS** incluye el cálculo de las mismas proyecciones, pero utilizando los parámetros del elipsoide GRS80 (tabla 5.2) y las coordenadas **MAGNA-SIRGAS** de los orígenes (tabla 4.1), manteniendo los valores de las coordenadas planas. Es decir, por ejemplo, para el origen Bogotá de la proyección Gauss-Krüger los valores $N = 1\ 000\ 000,0$ m y $E = 1\ 000\ 000,0$ m no se modifican, mientras que las coordenadas elipsoidales de dicho origen varían en $\Delta\phi = -10.249''$ y $\Delta\lambda = 12.272''$.

Al comparar las coordenadas planas [N, E] calculadas a partir de **MAGNA-SIRGAS** y sus equivalentes en Datum BOGOTÁ, se encuentra como máxima diferencia geométrica en Gauss-Krüger ~ 12 m y en Cartesianas ~ 1 m. La figura 7.2 muestra como a medida que la distancia a partir del origen aumenta, las divergencias entre las coordenadas mencionadas crecen. Es decir, que la representación en cartografía impresa de la posición [N, E] de un punto medido con GPS, cuyas coordenadas planas han sido calculadas con los parámetros del elipsoide GRS80, será más desfavorable entre más lejos se encuentre del origen de proyección. No obstante, de acuerdo con lo anterior y simulando la tabla 7.2, las discrepancias disminuyen considerablemente (tabla 7.3).

Tabla 7.3 Efecto, en diferentes escalas, de las máximas discrepancias geométricas entre coordenadas planas calculadas sobre Datum BOGOTÁ y **MAGNA-SIRGAS**

Escala	Desplazamiento	Proyección
1 : 1 000	1,0 mm	Cartesiana
1 : 2 000	0,5 mm	Cartesiana
1 : 10 000	0,1 mm / 1,2 mm	Cartesiana/Gauss-Krüger
1 : 25 000	0,5 mm	Gauss-Krüger
1 : 50 000	0,3 mm	Gauss-Krüger
1 : 100 000	0,1 mm	Gauss-Krüger
1 : 250 000	---	Gauss-Krüger
1 : 500 000	---	Gauss-Krüger
1 : 1 500 000	---	Gauss-Krüger

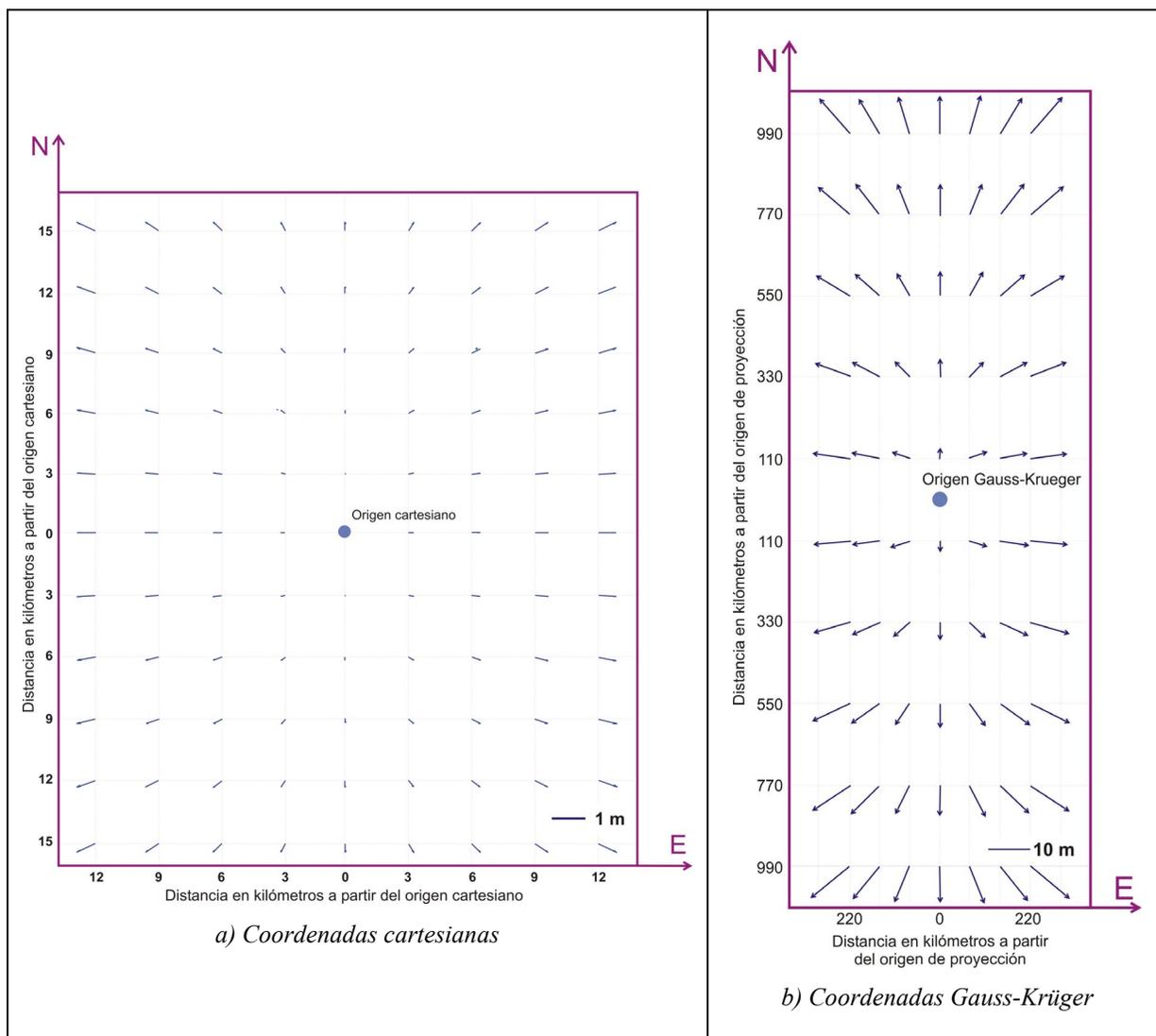


Figura 7.2 Representación gráfica de las discrepancias entre las coordenadas planas (N,E) calculadas con los parámetros del Datum BOGOTÁ y sus equivalentes calculadas sobre **MAGNA-SIRGAS**

8 **MAGNA-SIRGAS** EN SU ENTIDAD

Dentro de la adopción oficial de **MAGNA-SIRGAS**, el IGAC, invita a todas aquellas entidades de los sectores oficial, privado y académico, cuyas labores estén asociadas a la generación o aprovechamiento de mapas, datos espaciales o posicionamiento geográfico, a ser partícipes de este proceso con la migración a **MAGNA-SIRGAS** de sus datos existentes en el Datum BOGOTÁ y a generar su información espacial directamente sobre el nuevo datum. Este procedimiento redundará en una mejora ostensible de su gestión.

La migración al datum geocéntrico **MAGNA-SIRGAS** es de importancia para aquellas entidades que:

- Utilizan o producen mapas o datos espaciales con fines empresariales.
- Describen el medio geográfico en términos de coordenadas o cuadrículas.
- Utilizan o preparan documentos legales con base en coordenadas o cuadrículas.
- Su personal o usuarios requieren de coordenadas para el desempeño de sus funciones.
- Su personal o usuarios suministran información sobre políticas o aspectos técnicos relacionados con el uso y generación de coordenadas.

El proceso de migración a **MAGNA-SIRGAS** se facilita mediante la siguiente estrategia:

- Solicitar apoyo al IGAC en la documentación y aclaraciones pertinentes sobre la definición, características y ventajas del nuevo datum sobre el antiguo.
- Crear conciencia en su organización.
- Discutir los cambios con sus consumidores, proveedores y organismos sectoriales.
- Examinar la urgencia del cambio con base en sus operaciones o las de sus consumidores y proveedores.
- Implementar el cambio mediante entrenamiento de personal, transformación de mapas o datos espaciales o enmendando documentos legales, apoyándose en los parámetros de transformación oficiales determinados por el IGAC.
- Comprender e integrarse a las estrategias de sus proveedores.
- Contar a quienes dependen de usted qué se está haciendo, de manera que ellos puedan planificar.

Primeros pasos

Un cambio en el datum geodésico ocurre rara vez, de manera que es importante comprender sus elementos e investigarlos dentro de su organización. Es importante tener certeza sobre el datum que actualmente utiliza su entidad, así como el nuevo datum geocéntrico **MAGNA-SIRGAS**.

Resulta conveniente leer los documentos generados por el IGAC al respecto, especialmente:

- Adopción del Marco Geocéntrico Nacional de Referencia -**MAGNA-SIRGAS**- como datum oficial de Colombia.
- Aspectos prácticos de la adopción del Marco Geocéntrico Nacional de Referencia -**MAGNA-SIRGAS**- como datum oficial de Colombia.

El sitio web que presenta la información oficial sobre el tema es www.igac.gov.co
También es posible contar con la orientación de personal calificado de la División de Geodesia del IGAC: Sede Central Carrera 30 No. 48 – 51, piso 4, teléfono 3694010, 3694011, fax 3694105.



Sus necesidades

Una vez se haya comprendido el concepto de datum geocéntrico, identifique sus necesidades y cómo pueden verse afectadas. Lleve a cabo discusiones dentro de su organización, involucrando todos los niveles y grupos, para obtener una imagen general de sus datos actuales y futuros, así como los requerimientos y aplicación. Para ayudarse, desarrolle una aproximación coordinada y evalúe si el nuevo datum afectará a sus consumidores y proveedores de datos, y de qué manera lo hará.

Su Planteamiento

Si usted decide migrar a **MAGNA-SIRGAS**, los enfoques comunes son:

- Todo de una vez
- Por etapas, por programa, producto o servicio
- Por etapas según región geográfica o,
- Por demanda

Su planteamiento dependerá de la naturaleza y tamaño de sus bases de datos, de su capacidad técnica y las necesidades de sus clientes. Seleccione la opción que ofrezca la menor confusión posible.

Consideraciones

El tamaño de su organización y la cantidad de datos que usted utiliza o supe afectarán los costos y agendas relacionados con la transición. En el largo plazo, es más conveniente desplazarse al nuevo datum más temprano que tarde.

Usted también debe consultar:

- Sus procedimientos de gestión y mantenimiento de datos.
- Capacidades tecnológicas.
- Soporte al cliente.

Su plan

Su plan para moverse a **MAGNA-SIRGAS** debe incluir:

- Inventario de datos existentes y sus fuentes.
- Agenda de adopción de **MAGNA-SIRGAS** por parte de sus proveedores de datos.
- Procedimientos para transformar a **MAGNA-SIRGAS** la información referida al Datum BOGOTÁ.
- Procedimientos para tratar coordenadas duales durante la transición.
- Si se requiere, procedimientos para cambiar la legislación.
- Designación de responsables del cambio dentro de la organización.
- Cronograma de actividades.



Auditoría de datos

La revisión de datos puede ayudarle en:

- Cuáles de sus operaciones utilizan información geográfica.
- Si es necesario y cuándo se debe migrar a **MAGNA-SIRGAS**.
- Quiénes son responsables del mantenimiento de los datos.
- Quién puede acceder a los datos.
- Cuál información geográfica corporativa que ya existe, de dónde proviene, cuál es su precisión y cómo se emplea.

Datos digitales

Su migración a **MAGNA-SIRGAS** debe incluir estrategias que informen sobre el estado de sus datos. Si éstos provienen de otras fuentes, asegúrese de que:

- Sus proveedores de información geográfica sean conscientes de sus requerimientos.
- Usted y ellos tengan estrategias y soluciones integradas.
- Los vínculos de sus bases de datos estén funcionando adecuadamente.

Su plan debe incluir:

- Cómo se manipulan los datos distribuidos en forma de mosaico.
- Cómo pueden transformarse los datos raster y cómo se afectará la información.

Datum locales, no estandarizados

Si usted emplea este tipo de datum para sus proyectos, usted necesita considerar:

- Si esta información debe integrarse, en el futuro, con bases externas utilizando **MAGNA-SIRGAS**.
- Cómo puede usted llevar esta información a **MAGNA-SIRGAS**.
- Cómo afectará esta operación sus actividades diarias.

Mapas impresos

Verifique si es necesario o práctico convertir o reemplazar algunos o todos los mapas impresos que posee. La información que se extraiga de éstos puede ser migrada a **MAGNA-SIRGAS** siguiendo las diferentes metodologías propuestas por el IGAC.

Software

Usted puede utilizar software para procesar, ver o manipular datos espaciales. Mediante un inventario de los sistemas existentes se pueden definir las rutas de procesamiento de distintos elementos de los mapas e identificar el software empleado por su organización.



Usted debe evaluar si el software con el que cuenta le proporciona las transformaciones adecuadas para el datum geocéntrico **MAGNA-SIRGAS**.

Aspectos legales

El nuevo datum puede tener implicaciones legales para usted. Establezca:

- Legislación y regulaciones asociadas que hacen referencia a palabras clave como datum, longitud, latitud, coordenadas y similares.
- Su información espacial puede utilizarse como evidencia ante una autoridad judicial
- Sus contratos también deben hacer referencia al nuevo datum.
- Si tiene dudas, debe consultar su asesor jurídico.

Cronograma

En su mayor parte, su agenda para cambiar al datum **MAGNA-SIRGAS** estará dictada por:

- El cronograma de transformación de sus proveedores (dependiendo de esto, probablemente usted deberá usar sistemas de coordenadas duales durante el proceso de transformación).
- El cronograma de transformación de sus usuarios.
- La legislación que rige sus operaciones.
- Política oficial relevante.

Personal

Durante la migración al datum geocéntrico es probable que requiera entrenar o ilustrar parte de su personal o usuarios en cuanto a las políticas, los aspectos técnicos y elementos funcionales.

Financiación

Los fondos necesarios para la migración de la información existente a **MAGNA-SIRGAS** pueden incluirse dentro de los presupuestos normales o disponerse a través de gastos suplementarios. También es posible planear y financiar el cambio al nuevo datum como parte de otros proyectos o como actualización de herramientas.

CONCLUSIONES

La adopción de **MAGNA-SIRGAS** como sistema de referencia oficial para Colombia es una obligación impuesta por el *estado del arte* actual en temas de georreferenciación. Éste se constituye en una plataforma de referencia versátil, accesible, precisa y, además, compatible con las técnicas más modernas utilizadas en la determinación de coordenadas, como por ejemplo el GPS. **MAGNA-SIRGAS** facilita, entre otras, el intercambio de información espacial a escala nacional y mundial, el desarrollo de los sistemas de información geográfica



nacionales, departamentales, regionales y municipales, la administración digital de información gráfica y numérica georreferenciada, la implementación de la infraestructura nacional de datos espaciales *ICDE*, la generación y aprovechamiento de datos geográficos con ubicación espacial de alta precisión, etc.

Si bien la información espacial recientemente generada, poco a poco se ha georreferenciado en *MAGNA-SIRGAS*, es necesario que los datos asociados al antiguo Datum BOGOTÁ sean migrados consecuentemente, para que el valor agregado que ellos representan pueda seguir siendo aprovechado y se descarte su desuso por la obvia obsolescencia del datum clásico colombiano.

En este sentido, el IGAC recomienda, tanto a sus usuarios, como a los generadores y consumidores de datos espaciales en el país, abrazar las siguientes estrategias:

- Referenciación directa en *MAGNA-SIRGAS* de los productos espaciales (gráficos y numéricos) que se generen por primera vez.
- Migración a *MAGNA-SIRGAS* de la información espacial en formato digital referida al Datum BOGOTÁ mediante la aplicación de los parámetros y la metodología para transformación de datum diseñada por el IGAC.
- Utilización cuidadosa de la cartografía impresa referida al Datum BOGOTÁ, mientras que el IGAC logra su total renovación y generación en *MAGNA-SIRGAS*.

BIBLIOGRAFÍA

Collier, Ph.; Leahy, F.; Argeseanu, F. (1998) *Transition to the Geocentric Datum of Australia*. Department of Geomatics, The University of Melbourne, 145 p.

Drewes, H. (1998): *Time evolution of the SIRGAS reference frame*. In: Brunner, F. (Ed.), *Advances in Positioning and Reference Frames*, IAG Symposia (118) 174-179, Springer.

Drewes, H.; Sánchez L.; Blitzkow, D.; Freitas, S. (2001): *Scientific foundations of the SIRGAS vertical reference System*. In: Drewes, et al, (Ed.), *Vertical Reference Systems*, IAG Symposia (124) 297-301, Springer.

Drewes, H.; Kaniuth, K.; Stuber, K.; Tremel, H.; Kahle, G.; Straub, Ch.; Hernández, N.; Hoyer, M. and Wildermann, E. (1995): *The CASA '93 GPS campaign for crustal deformation research along the South Caribbean plate boundary*. J. Geodynamics, Vol. 20, 129 – 144. Pergamon.

Drewes, H; Heidbach, O. (2003): *Deformation of the South American crust estimated from finite element and collocation methods*. Presented at the IUGG General Asembly in Sapporo, Japan, July (En prensa).



- Drewes, H.; Kaniuth, K.; Völksen, Ch.; Costa, S. M. A.; Fourtes, L. P. S. (2003): *Results of the 2000 SIRGAS campaign and coordinates variations with respect to the 1995 South American reference frame*. Presented at the IUGG General Asembly in Sapporo, Japan, July (En prensa).
- IERS (2000): *Technical Note No. 27*.
- IERS (2003): *Technical Note No. 31*.
- Hofmann-Wellenhof, B.; Kienast, G.; Lichtenegger, H. (1994): *GPS in the Praxis*. Wien, New York: Springer.
- Hugentobler, U.; Schaer, S.; Fridez, P. (Eds). (2001): *Documentation of the Bernese GPS Software, Version 4.2*. Astronomical Institute, University of Berne.
- Kellogg, J. and Vega, V. (1995): *Tectonic development of Panama, Costa Rica and the Colombian Andes: Constraints from Global Positioning System, geodetic studies and gravity*. Geol. Soc. Special paper 295.
- Kouba J. and Popelar J. (1999): *Modern geodetic reference frames for precise satellite positioning and navigation*. (Copia preliminar)
- León, W. (2004) *Conversión entre coordenadas geodésicas y cartesianas*. Conversación personal. División de Geodesia, IGAC.
- Luz, R. T.; Fortes, L. P. S.; Hoyer, M.; Drewes, H. (2001): *The vertical reference frame for the Americas - the SIRGAS 2000 GPS campaign*. In: Drewes, et al. (Eds.), *Vertical Reference Systems*, IAG Symposia (124) 301-305, Springer.
- Merrigan, M.; Swift, E.; Wong, R.; Saffer, J. (2002): *A refinement to the World Geodetic System 1984 Reference Frame*. Presented at the Institute of Navigation, ION-GPS-2002, Portland, OR, September.
- Moritz, H. (2000): *Geodetic Reference System 1980*. Jorunal of Geodesy, No. 74. Pp. 128 - 133.
- Ruiz, J. I.; Arjona, B. (1941): *Resultados finales de las redes geodésicas establecidas entre Bogotá y Cartago y entre Bogotá y Chiquinquirá. Publicación especial No. 1*, primera edición. Instituto Geográfico Militar y Catastral. Bogotá.
- Sánchez, L.; Tremel, H. and Drewes, H. (1999): *The Colombian national geocentric reference frame*. IUGG 99 Birmingham. July 18 – 30.
- Sánchez, L. Martínez, W. (1999): *Vinculación de alturas elipsoidales GPS al datum vertical clásico de Colombia*. En: IGeS Bulletin Nr. 9, pp. 73-85. Milano.
- Sánchez, L. (2003): *Bestimmung der Höhenreferenzfläche für Kolumbien*. Diplomarbeit. Technische Universität Dresden.
- Seemueller, W., Drewes, H. (1998): *Annual report of the RNAAC SIRGAS*. In: IGS 1997 Technical Reports, 173-174, IGS CB Pasadena.



- Seemueller, W., Drewes, H. (2002): *Annual report 2000 of the RNAAC SIRGAS*. In: IGS 2000 Technical Reports. JPL Publication 02-012, 141 – 144, IGS CB Pasadena.
- Seemueller, W., Kaniuth, K., Drewes, H. (2002): *Velocity estimates of IGS-RNAAC-SIRGAS stations*. In: Drewes, et al. (Eds.), *Vertical Reference Systems*, IAG Symposia (124) 301-305, Springer.
- SIRGAS (1997): *Final Report Working Groups I and II - SIRGAS Relatório Final Grupos de Trabalho I e II*. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro.
- SIRGAS (2002) Boletín Informativo No. 6. http://www.ibge.gov.br/home/geografia/geodesico/pdf/bol_006.pdf
- Tapley, B., M. Kim, S. Poole, M. Cheng, D. Chambers, J. Ries (2001). *The TEG-4 Gravity field model*. AGU Fall 2001. Abstract G51A-0236
- Teunissen, P. and Kleusberg A. (Eds.) (1998): *GPS for Geodesy*. Springer.
- Tremel, H.; Sánchez, L. y Drewes, H. (2001): *Procesamiento de la red GPS básica de Colombia - Marco Geocéntrico Nacional de Referencia, -MAGNA-*. En: *Revista Cartográfica*, Instituto Panamericano de Geografía e Historia. No. 73 (7-23). México.
- Torge, W. (2001): *Geodesy*. 3rd Edition: Berlin, New York, De Gruyter.
- Vanicek, P. and Steeves, R. (1996): *Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums*. In: *Journal of Geodesy*. No. 70. Pp. 740 – 745

REPÚBLICA DE COLOMBIA

Instituto Geográfico Agustín Codazzi
Subdirección de Geografía y Cartografía
División de Geodesia

Carrera 30 No. 48 – 51 Oficina 401
Teléfonos: 369 4011 - 369 4000 Ext. 4011 – 4014
Fax: 368 0991
<http://www.igac.gov.co>



Anexo I: CONVERSIÓN DE COORDENADAS

CONTENIDO

Conversión de coordenadas cartesianas tridimensionales $[X, Y, Z]$ a elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$	57
Conversión de coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$ a cartesianas tridimensionales $[X, Y, Z]$	58
Conversión de coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$ a planas de Gauss-Krüger $[N, E]$	58
Conversión de coordenadas planas de Gauss-Krüger $[N, E]$ a elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$	60
Conversión de coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$ a planas cartesianas $[N, E]$	62
Conversión de coordenadas planas cartesianas $[N, E]$ a elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$	64

Anexo I: CONVERSIÓN DE COORDENADAS

Esta sección presenta un ejemplo numérico de las diferentes conversiones, tanto en **MAGNA-SIRGAS**, como en Datum BOGOTÁ, entre los tipos de coordenadas existentes en Colombia. La utilización de alguno de los sistemas exige concordancia de los parámetros utilizados en la evaluación numérica de las formulaciones matemáticas correspondientes. Es decir, si se desea calcular coordenadas planas de Gauss-Krüger en **MAGNA-SIRGAS**, es necesario que las coordenadas elipsoidales, tanto del origen de proyección como del punto de cálculo, estén referidas a este sistema y que las constantes del elipsoide sean las del GRS80. Igualmente, si el sistema de referencia es el Datum BOGOTÁ, las coordenadas elipsoidales deberán estar referidas a dicho datum y las constantes elipsoidales deberán ser las del Internacional de 1924 o de Hayford.

Conversión de coordenadas cartesianas tridimensionales [X, Y, Z] a elipsoidales [φ , λ , h]

Descripción	Valor asociado a MAGNA-SIRGAS	Valor asociado al Datum BOGOTÁ
Coordenadas cartesianas rectangulares	X = 1 738 892,582 m Y = -6 117 560,999 m Z = 513 286,769 m	X = 1 738 892,582 m Y = -6 117 560,999 m Z = 513 286,769 m
Parámetros del elipsoide	a = 6 378 137,000 m b = 6 356 752,314 14 m e ² = 6,694 380 022 90 · 10 ⁻³ e' ² = 6,739 496 775 48 · 10 ⁻³	a = 6 378 388,000 m b = 6 356 911,946 13 m e ² = 6,722 670 022 33 · 10 ⁻³ e' ² = 6,768 170 197 22 · 10 ⁻³
$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$	N = 6 378 277,018 m	N = 6 378 528,623 m
$\tan \vartheta = \frac{Z a}{\sqrt{X^2 + Y^2} b}$	tan ϑ = 0,080 978 268 558	tan ϑ = 0,080 979 421 739
$\tan \varphi = \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \vartheta}{\sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 a \cos^3 \vartheta}$	tan φ = 8,125 046 542 07 E-02	tan φ = 8,125 280 019 28 E-02
$\tan \lambda = \frac{Y}{X}$	tan λ = -3,518 078 725 693	tan λ = -3,518 078 725 693
$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N$	2579,118 m	2328,716 m
Latitud	4° 38' 42,377 70" N	4° 38' 42,856 13" N
Longitud	74° 7' 56,671 31" W	74° 7' 56,671 31" W
Altura elipsoidal	2579,118 m	2328,716 m



Nótese que, a pesar de que las coordenadas rectangulares [X, Y, Z] de partida son idénticas en los dos sistemas de referencia, las coordenadas elipsoidales [φ , λ , h] discrepan, ya que los parámetros de los elipsoides asociados a cada uno de ellos son diferentes.

Conversión de coordenadas elipsoidales [φ , λ , h] a cartesianas tridimensionales [X, Y, Z]

Descripción	Valor asociado a <i>MAGNA-SIRGAS</i>	Valor asociado al Datum BOGOTÁ
Coordenadas elipsoidales	$\varphi = 4^{\circ} 38' 42,377 70''$ N $\lambda = 74^{\circ} 7' 56,671 31''$ W h = 2579,118 m	$\varphi = 4^{\circ} 38' 42,856 13''$ N $\lambda = 74^{\circ} 7' 56,671 31''$ W h = 2328,716 m
Parámetros del elipsoide	a = 6 378 137,000 m $e^2 = 6,694 380 022 90 \cdot 10^{-3}$	a = 6 378 388,000 m $e^2 = 6,722 670 022 33 \cdot 10^{-3}$
$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$	N = 6 378 277,018 m	N = 6 378 528,623 m
$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda$	X = 1 738 892,582 m	X = 1 738 892,582 m
$Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda$	Y = -6 117 560,999 m	Y = -6 117 560,999 m
$Z = ((1 - e^2) N + h) \sin \varphi$	Z = 513 286,769 m	Z = 513 286,769 m

Conversión de coordenadas elipsoidales [φ , λ , h] a planas de Gauss-Krüger [N, E]

Descripción	Valor asociado a <i>MAGNA-SIRGAS</i>	Valor asociado al Datum BOGOTÁ
Coordenadas elipsoidales	$\varphi_p = 4^{\circ} 10' 15,236''$ N $\lambda_p = 75^{\circ} 47' 42,148''$ W	$\varphi_p = 4^{\circ} 10' 15,236''$ N $\lambda_p = 75^{\circ} 47' 42,148''$ W
Parámetros del elipsoide	a = 6 378 137,000 m b = 6 356 752,314 14 m $e^2 = 6,694 380 022 90 \cdot 10^{-3}$ $e'^2 = 6,739 496 775 48 \cdot 10^{-3}$	a = 6 378 388,000 m b = 6 356 911,946 13 m $e^2 = 6,722 670 022 33 \cdot 10^{-3}$ $e'^2 = 6,768 170 197 22 \cdot 10^{-3}$
Parámetros del origen de proyección	Origen: Bogotá-MAGNA $\varphi_o = 4^{\circ} 35' 46,3215''$ N $\lambda_o = 74^{\circ} 4' 39,0285''$ W No = 1 000 000,0 m Eo = 1 000 000,0 m	Origen: Bogotá-BOGOTÁ $\varphi_o = 4^{\circ} 35' 56,57''$ N $\lambda_o = 74^{\circ} 4' 51,30''$ N No = 1 000 000,0 m Eo = 1 000 000,0 m
Términos auxiliares		
$l = \lambda_p - \lambda_o$	-0,029 976 609 255	-0,029 917 115 344
$t = \tan \varphi_p$	0,072 924 779 352	0,072 924 779 352



$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_p$	6,703 845 568 E-03	6,732 367 310 E-03
$n = \frac{a-b}{a+b}$	0,001 679 220 395	0,001 686 340 641
$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$	6 378 249,936 m	6 378 501,418 m
Arco de meridiano		
Coeficientes		
$\alpha = \frac{a+b}{2} \left(1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \dots \right)$	6 367 449,146	6 367 654,500
$\beta = -\frac{3}{2} n + \frac{9}{16} n^3 - \frac{3}{32} n^5 + \dots$	-2,518 827 928 E-03	-2,529 508 264 E-03
$\gamma = \frac{15}{16} n^2 - \frac{15}{32} n^4 + \dots$	2,643 541 086 E-06	2,666 006 919 E-06
$\delta = -\frac{35}{48} n^3 + \frac{105}{256} n^5 - \dots$	-3,452 623 473 E-09	-3,496 729 458 E-09
$\varepsilon = \frac{315}{512} n^4 + \dots$	4,891 830 424 E-12	4,975 329 172 E-12
Arco de meridiano para el punto de cálculo		
Latitud del punto de cálculo en radianes	0,072 795 918 379	0,072 795 918 379
$G(\varphi_p) = \alpha [\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi + \varepsilon \sin 8\varphi + \dots]$	461 202,2962	461 207,3446
Arco de meridiano para el origen		
Latitud del origen en radianes	0,080 218 830 352	0,080 268 516 482
$G(\varphi_o) = \alpha [\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi + \varepsilon \sin 8\varphi + \dots]$	508 232,4656	508 552,8443
Coordenada Norte		
$(G(\varphi_p) - G(\varphi_o))$	-47 030,1695	-47 345,4997
$\frac{t}{2} N l^2 \cos^2 \varphi_p$	207,877 845	207,061 687
$\frac{t}{24} N \cos^4 \varphi_p (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) l^4$	7,827283993E-02	7,766 030 703 E-02

$\frac{t}{720} N \cos^6 \varphi_p \times$ $(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2)l^6$	2,882 958 046 E-05	2,849 258 599 E-05
$\frac{t}{40320} N \cos^8 \varphi_p \times$ $(1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6)l^8$	1,007 715 430 E-08	9,918 653 131 E-09
Norte	953 177,787 m	952 861,640 m
Coordenada Este		
$N l \cos \varphi_p$	-190 691,926 340	-190 320,967 990
$\frac{1}{6} N \cos^3 \varphi_p (1 - t^2 + \eta^2)l^3$	-2,844 749 560 E+01	-2,828 037 463 E+01
$\frac{1}{120} N \cos^5 \varphi_p \times$ $(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2)l^5$	-6,343 141 464 E-03	-6,281 183 902 E-03
$\frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi_p \times$ $(61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6)l^7$	-1,579 531 694 E-06	-1,557 779 305 E-06
Este	809 279,620 m	809 650,745 m

Nótese que, a pesar de que las coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda]$ de partida son idénticas en los dos sistemas de referencia, las coordenadas planas de Gauss-Krüger discrepan, ya que los parámetros de los elipsoides asociados y las coordenadas elipsoidales de los orígenes de cada uno de ellos son diferentes.

Conversión de coordenadas planas de Gauss-Krüger [N, E] a elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$

Descripción	Valor asociado a MAGNA-SIRGAS	Valor asociado al Datum BOGOTÁ
Coordenadas planas	N = 953 177,787 m E = 809 279,620 m	N = 952 861,640 m E = 809 650,745 m
Parámetros del elipsoide	$a = 6\,378\,137,000$ m $b = 6\,356\,752,314$ 14 m $e^2 = 6,694\,380\,022\,90 \cdot 10^{-3}$ $e'^2 = 6,739\,496\,775\,48 \cdot 10^{-3}$	$a = 6\,378\,388,000$ m $b = 6\,356\,911,946$ 13 m $e^2 = 6,722\,670\,022\,33 \cdot 10^{-3}$ $e'^2 = 6,768\,170\,197\,22 \cdot 10^{-3}$



Parámetros del origen de proyección	Origen: Bogotá-MAGNA $\varphi_0 = 4^\circ 35' 46,3215''$ N $\lambda_0 = 74^\circ 4' 39,0285''$ W $N_0 = 491\,767,5344$ m $E_0 = 1\,000\,000,0$ m	Origen: Bogotá-BOGOTÁ $\varphi_0 = 4^\circ 35' 56,57''$ N $\lambda_0 = 74^\circ 4' 51,30''$ N $N_0 = 491\,447,16$ m $E_0 = 1\,000\,000,0$ m
Términos auxiliares		
$\Delta N = N - N_0$	461 410,252 m	461 414,480 m
$\Delta E = E - E_0$	-190 720,380 m	-190 349,255 m
$t_f = \tan \varphi_f$	0,072 957 776 501	0,072 957 645 905
$\eta_f^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_f$	6,703 813 468 E-03	6,732 335 202 E-03
$n = \frac{a-b}{a+b}$	0,001 679 220 395	0,001 686 340 641
$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$	6 378 250,038	6 378 501,519
Latitud del punto guía (φ)		
$\alpha = \frac{a+b}{2} \left(1 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{64}n^4 + \dots \right)$	6 367 449,146	6 367 654,500
$\beta = \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \frac{269}{512}n^5 + \dots$	2,518 826 597 E-03	2,529 506 915 E-03
$\gamma = \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4 + \dots$	3,700 949 072 E-06	3,732 401 093 E-06
$\delta = \frac{151}{96}n^3 - \frac{417}{128}n^5 - \dots$	7,447 770 380 E-09	7,542 912 609 E-09
$\varepsilon = \frac{1097}{512}n^4 + \dots$	1,703 599 357 E-11	1,732 678 127 E-11
$\varphi_f = \frac{\Delta N}{\alpha} + \beta \sin \frac{2\Delta N}{\alpha} + \gamma \sin \frac{4\Delta N}{\alpha} + \delta \sin \frac{6\Delta N}{\alpha} + \varepsilon \sin \frac{8\Delta N}{\alpha} + \dots$	$4^\circ 10' 22,00613''$	$4^\circ 10' 21,97934''$
Latitud		
$\frac{t_f}{2N_f^2} (-1 - \eta_f^2) \Delta E^2$	-3,283 480 451 E-05	-3,270 543 055 E-05



$\frac{t_f}{24 N_f^4} (5+3t_f^2+6\eta_f^2 - 6t_f^2 \eta_f^2 - 3\eta_f^4 - 9t_f^2 \eta_f^4) \Delta E^4$	1,228 671 971 E-08	1,218 982 604 E-08
$\frac{t_f}{720 N_f^6} (-61-90t_f^2-45t_f^4 - 107\eta_f^2+162t_f^2\eta_f^2+45t_f^4\eta_f^2) \Delta E^6$	-4,504 493 288 E-12	-4,451 311 847 E-12
$\frac{t_f}{40320 N_f^8} (1385+3633t_f^2 + 4096t_f^4+1575t_f^6) \Delta E^8 + \dots$	1,624 138 76 9E-15	1,598 519 617 E-15
Latitud	4° 10' 15,236"	4° 10' 15,236"
Longitud		
$\frac{1}{N_f \cos \varphi_f} \Delta E$	-2,998 115 348 E-02	-2,992 163 274 E-02
$\frac{1}{6N_f^3 \cos \varphi_f} (-1-2t_f^2-\eta_f^2) \Delta E^3$	4,545 256 380 E-06	4,518 365 965 E-06
$\frac{1}{120 N_f^5 \cos \varphi_f} (5+28t_f^2 + 24t_f^4+6\eta_f^2+8t_f^2\eta_f^2) \Delta E^5$	-1,036 658 619 E-09	-1,026 443 165 E-09
$\frac{1}{5040 N_f^7 \cos \varphi_f} (-61-662t_f^2 - 1320t_f^4-720t_f^6) \Delta E^7 + \dots$	2,745 130 215 E-13	2,707 207 478 E-13
Longitud	75° 47' 42,148"	75° 47' 42,148"

Conversión de coordenadas elipsoidales [φ , λ , h] a planas cartesianas [N, E]

Descripción	Valor asociado a MAGNA-SIRGAS	Valor asociado al Datum BOGOTÁ
Coordenadas elipsoidales	$\varphi_p = 4^\circ 10' 15,236''$ N $\lambda_p = 75^\circ 47' 42,148''$ W	$\varphi_p = 4^\circ 10' 15,236''$ N $\lambda_p = 75^\circ 47' 42,148''$ W



Parámetros del elipsoide	$a = 6\,378\,137,000\text{ m}$ $b = 6\,356\,752,314\,14\text{ m}$ $e^2 = 6,694\,380\,022\,90 \cdot 10^{-3}$ $e'^2 = 6,739\,496\,775\,48 \cdot 10^{-3}$	$a = 6\,378\,388,000\text{ m}$ $b = 6\,356\,911,946\,13\text{ m}$ $e^2 = 6,722\,670\,022\,33 \cdot 10^{-3}$ $e'^2 = 6,768\,170\,197\,22 \cdot 10^{-3}$
Parámetros del origen de proyección	Origen Cartesiano: Bogotá-MAGNA $\varphi_0 = 4^\circ 40' 49,75''\text{ N}$ $\lambda_0 = 74^\circ 8' 47,73''\text{ W}$ $N_0 = 109\,320,965\text{ m}$ $E_0 = 92\,334,879\text{ m}$ $P_p = 2550,0\text{ m}$	Origen Cartesiano: Bogotá-BOGOTÁ $\varphi_0 = 4^\circ 41'\text{ N}$ $\lambda_0 = 74^\circ 9'\text{ N}$ $N_0 = 109\,320,965\text{ m}$ $E_0 = 92\,334,879\text{ m}$ $P_p = 2550,0\text{ m}$
Términos auxiliares		
$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$	-0,008 893 974 854 Rad	-0,008 943 668 256 Rad
$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$	-0,028 770 870 358 Rad	-0,028 711 383 720 Rad
$\varphi_m = (\varphi_0 + \varphi) / 2$	0,077 242 905 806 Rad	0,077 267 7525 07 Rad
$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$	$N_{\varphi_0} = 6\,378\,279,154\text{ m}$ $N_{\varphi} = 6\,378\,249,936\text{ m}$	$N_{\varphi_0} = 6\,378\,530,934\text{ m}$ $N_{\varphi} = 6\,378\,501,418\text{ m}$
$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$	$M_{\varphi_0} = 6\,335\,862,944\text{ m}$ $M_{\varphi_m} = 6\,335\,818,165\text{ m}$	$M_{\varphi_0} = 6\,335\,934,130\text{ m}$ $M_{\varphi_m} = 6\,335\,888,889\text{ m}$
Coordenada Norte		
$\left[\Delta\varphi_{rad} + \frac{\tan \varphi_0 \Delta\lambda_{rad}^2 N_{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{2 M_{\varphi_0} N_{\varphi_0}} \right]$	3,393 143 223 E-05	3,381 286 336 E-05
$\left[1 + \frac{P_p}{M_{\varphi_m}} \right]$	1,000 402 473 672	1,000 402 469 179
Norte	53 162,351 m	52 845,988 m
Coordenada Este		
$\Delta\lambda_{rad} N_{\varphi} \cos \varphi$	-183 021,790 235	-182 650,575 729
$\left[1 + \frac{P_p}{N_{\varphi_0}} \right]$	1,000 399 794 355	1,000 399 778 574
Este	-90 760,082 m	-90 388,717 m

Conversión de coordenadas planas cartesianas [N, E] a elipsoidales [φ , λ , h]

Descripción	Valor asociado a MAGNA-SIRGAS	Valor asociado al Datum BOGOTÁ
Coordenadas planas	N = 53 162,351 m E = -90 760,082 m	N = 52 845,988 m E = -90 388,717 m
Parámetros del elipsoide	$a = 6\,378\,137,000$ m $b = 6\,356\,752,314\,14$ m $e^2 = 6,694\,380\,022\,90 \cdot 10^{-3}$ $e'^2 = 6,739\,496\,775\,48 \cdot 10^{-3}$	$a = 6\,378\,388,000$ m $b = 6\,356\,911,946\,13$ m $e^2 = 6,722\,670\,022\,33 \cdot 10^{-3}$ $e'^2 = 6,768\,170\,197\,22 \cdot 10^{-3}$
Parámetros del origen de proyección	Origen Cartesiano: Bogotá-MAGNA $\varphi_0 = 4^\circ 40' 49,75''$ N $\lambda_0 = 74^\circ 8' 47,73''$ W $N_0 = 109\,320,965$ m $E_0 = 92\,334,879$ m $P_p = 2550,0$ m	Origen Cartesiano: Bogotá-BOGOTÁ $\varphi_0 = 4^\circ 41'$ N $\lambda_0 = 74^\circ 9'$ N $N_0 = 109\,320,965$ m $E_0 = 92\,334,879$ m $P_p = 2550,0$ m
Términos auxiliares		
$\Delta N = N - N_0$	-56 158,614 m	-56 474,977 m
$\Delta E = E - E_0$	-183 094,961 m	-182 723,596 m
$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$	$N_{\varphi_0} = 6\,378\,279,154$ m $N_{\varphi} = 6378249,936$ m	$N_{\varphi_0} = 6\,378\,530,934$ m $N_{\varphi} = 6\,378\,501,418$ m
$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$	$M_{\varphi_0} = 6\,335\,862,944$ m	$M_{\varphi_0} = 6\,335\,934,130$ m
Latitud		
$\frac{\Delta N}{\left[1 + \frac{P_p}{a(1 - e^2)}\right] M_{\varphi_0}}$	-8,860 043 198 E-03	-8,909 855 177 E-03
$\frac{\tan \varphi_0}{2 M_{\varphi_0} N_{\varphi_0}}$	1,012 970 022 E-15	1,013 537 585 E-15



$\left(\frac{\Delta E}{1 + \frac{Pp}{a}} \right)^2$	3,349 697 499 E+10	3,336 123 222 E+10
$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$	4° 10' 15,236"	4° 10' 15,236"
Longitud		
$\frac{\Delta Este}{N_\varphi \cos \varphi \left(1 + \frac{Pp}{a} \right)}$	-0,028 770 870 053	-0,028 711 383 463
$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$	75° 47' 42,148"	75° 47' 42,148"



Anexo II: TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

CONTENIDO

Transformación del Datum BOGOTÁ a MAGNA-SIRGAS de un conjunto de datos extraídos de cartografía digital utilizando el modelo Molodensky-Badekas y su refinación mediante una transformación bidimensional afín.	67
Determinación de los parámetros de una transformación bidimensional afín.	73
Transformación del Datum BOGOTÁ a MAGNA-SIRGAS de un conjunto de datos espaciales utilizando la transformación bidimensional a partir de coordenadas elipsoidales	76

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla II.1 Conversión de coordenadas referidas al Datum BOGOTÁ como preparación para su transformación a MAGNA-SIRGAS	70
Tabla II.2 Coordenadas transformadas, del Datum BOGOTÁ a MAGNA-SIRGAS , utilizando el modelo Molodensky-Badekas, con refinación mediante una transformación bidimensional afín.	71
Tabla II.3 Matrices consideradas en la determinación de los parámetros de una transformación bidimensional afín	75

Anexo II: TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

La migración de datos espaciales del Datum BOGOTÁ al Sistema *MAGNA-SIRGAS* comprende el siguiente procedimiento:

- a. Identificar el sistema de proyección cartográfica (Gauss-Krüger o Cartesiano) al que corresponden las coordenadas planas [N, E]. (Sistema de referencia: Datum BOGOTÁ).
- b. Convertir las coordenadas planas [N, E] a elipsoidales [φ , λ] (sección 5.4 o 5.5). (Sistema de referencia: Datum BOGOTÁ).
- c. Convertir las coordenadas elipsoidales [φ , λ] a rectangulares tridimensionales [X, Y, Z] (sección 5.3), con ayuda del modelo geoidal GEOCOL (sección 6.1, ecuación 5.1), si está disponible la componente vertical (altura elipsoidal o sobre el nivel medio del mar) de los datos que se desean transformar. (Sistema de referencia: Datum BOGOTÁ).
- d. Identificar la zona a la cual corresponden los datos que se desea transformar (figura 6.2) para utilizar los parámetros regionales pertinentes. (Sistema de referencia: Datum BOGOTÁ).
- e. Aplicar el modelo Helmert (sección 6.1) o Molodensky-Badekas (sección 6.2) con los parámetros de transformación correspondientes (tabla 6.1 o 6.2). (Sistema de referencia: Paso del Datum BOGOTÁ al Sistema *MAGNA-SIRGAS*).
- f. Si no está disponible la altura (elipsoidal o sobre el nivel medio del mar) de los datos que se desea transformar, utilizar la transformación bidimensional a partir de coordenadas elipsoidales [φ , λ] (sección 6.4) con los parámetros correspondientes (tabla 6.3). (Sistema de referencia: Paso del Datum BOGOTÁ al Sistema *MAGNA-SIRGAS*).
- g. Convertir las coordenadas rectangulares tridimensionales [X, Y, Z] a geográficas [φ , λ] (sección 5.3) y éstas a coordenadas planas [N, E] según se requiera (Gauss-Krüger o Cartesianas) (sección 5.4 o 5.5). (Sistema de referencia: *MAGNA-SIRGAS*).
- h. Refinar la transformación regional mediante el modelo bidimensional afín (Sistema de referencia: *MAGNA-SIRGAS*).

A continuación se presentan algunos ejemplos numéricos del procedimiento descrito.

Transformación del Datum BOGOTÁ a *MAGNA-SIRGAS* de un conjunto de datos extraídos de cartografía digital utilizando el modelo Molodensky-Badekas y su refinación mediante una transformación bidimensional afín.

De algunas planchas a escala 1:2000 de la ciudad de Bogotá se han extraído ciertos detalles cartográficos, cuyas coordenadas deben ser transformadas a *MAGNA-SIRGAS*. El sistema de



referencia es el Datum BOGOTÁ y la proyección es la cartesiana con origen Bogotá-BOGOTÁ: $\varphi_0 = 4^\circ 41' N$, $\lambda_0 = 74^\circ 9' N$, $N_0 = 109\,320,965\text{ m}$, $E_0 = 92\,334,879\text{ m}$ y plano de proyección a una altura de 2550,0 m. Las tablas II.1 y II.2 muestran el resumen de las coordenadas convertidas y transformadas después de aplicar el siguiente procedimiento.

- Información extraída de la cartografía (Sistema de referencia: Datum BOGOTÁ):
- Conversión de coordenadas cartesianas [N, E] a elipsoidales [φ , λ] (ecuaciones 5.9a, 5.9b, 5.9c) utilizando los parámetros del elipsoide Internacional (tabla 5.1) (Sistema de referencia: Datum BOGOTÁ):
- Conversión de coordenadas elipsoidales [φ , λ] a coordenadas rectangulares tridimensionales [X, Y, Z] (ecuación 5.1) utilizando los parámetros del elipsoide Internacional (tabla 5.1). (Sistema de referencia: Datum BOGOTÁ). Dado que no se conoce la componente vertical (altura) de los puntos a transformar, se ha asumido como altura elipsoidal para todos los puntos un valor promedio de 2550 m.
- Aplicación de los parámetros de transformación siguiendo el modelo de Molodensky-Badekas (ecuación 6.2). (Sistema de referencia: Paso del Datum BOGOTÁ a MAGNA-SIRGAS). Dado que los puntos están ubicados en Bogotá, la zona de transformación regional corresponde con la VIII, es decir que los parámetros de transformación (tabla 6.2) equivalen a:

Parámetros de transformación para la Región VIII ($\varphi = 4,5 S \dots 3,0 N$, $\lambda = 74,0 \dots 66,5 W$); ($\varphi = 3,0 \dots 5,0 N$, $\lambda = 74,4 \dots 66,5 W$); ($\varphi = 5,0 \dots 7,3 N$, $\lambda = 72,0 \dots 66,5 W$)			
ΔX [m]	302,529	Ry [rad]	-2,174 456 E-06
ΔY [m]	317,979	Rz [rad]	-1,362 418 E-05
ΔZ [m]	-319,080	Xo [m]	1 738 580,767
λ	-2,199 976 E-06	Yo [m]	-6 120 500,388
Rx [rad]	1,361 566 E-05	Zo [m]	491 473,3064

- Conversión de coordenadas rectangulares tridimensionales [X, Y, Z] a elipsoidales [φ , λ] (ecuaciones 5.2a, 5.2b, 5.2c) utilizando los parámetros del elipsoide GRS80 (tabla 5.2). (Sistema de referencia: MAGNA-SIRGAS):
- Conversión de coordenadas elipsoidales [φ , λ] a planas cartesianas [N, E] (ecuaciones 5.8a, 5.8b) utilizando el origen cartesiano Bogotá-MAGNA ($\varphi_0 = 4^\circ 40' 49,75'' N$, $\lambda_0 = 74^\circ 8' 47,73'' W$, $N_0 = 109\,320,965\text{ m}$, $E_0 = 92\,334,879\text{ m}$ y $P_p = 2550,0\text{ m}$) y los parámetros del elipsoide GRS80 (tabla 5.2). (Sistema de referencia: MAGNA-SIRGAS):
- Refinamiento de las coordenadas planas [N, E] transformadas mediante la utilización del modelo bidimensional afin (ecuaciones 6.5a, 6.5b). (Sistema de referencia:



MAGNA-SIRGAS) Los parámetros utilizados han sido calculados a partir de los puntos comunes al Datum BOGOTÁ y al Sistema ***MAGNA-SIRGAS*** en el área de interés, siguiendo la metodología expuesta en la sección 6.2. Sus valores corresponden con:

Parámetro	Valor
a	1,000 015 853
b	-3,258 058 E-06
c	-1,206 327 338
d	-2,279 698 E-06
e	0,999 999 028
f	-0,131 654 982

Los parámetros para la aplicación de la transformación afín deben ser estimados localmente según la disponibilidad de datos para tal fin. Si bien el IGAC cuenta con estos valores para algunas ciudades del país, lo más recomendable sería, que los propios tenedores de la información espacial determinaran el conjunto de parámetros óptimos para la refinación de sus datos. Para el efecto, sería necesario identificar algunos puntos, ya sea sobre cartografía digital o en bases de datos espaciales, a los que se les pueda definir coordenadas referidas a ***MAGNA-SIRGAS***, ya sea por ocupación GPS directa en campo o mediante la consulta de un medio externo, como por ejemplo vértices o cartografía IGAC. En todos los casos, se requiere como etapa previa la aplicación de los parámetros regionales de transformación (según Molodensky-Badekas o la transformación bidimensional a partir de coordenadas elipsoidales) calculados por el IGAC. No obstante, si se observa la tabla II.2, la comparación de las coordenadas cartesianas antes y después de la transformación bidimensional afín presentan diferencias en torno a 0,3 cm en la coordenada Norte y a 4,4 cm en la Este, valores que son prácticamente despreciables si se considera la precisión requerida para una escala 1:2000. En este sentido, es conveniente que cada productor o consumidor de información georreferenciada interesado en migrar sus datos a ***MAGNA-SIRGAS***, establezca la precisión final de sus coordenadas y evalúe la necesidad de aplicar o no la transformación bidimensional afín; puede ser que en la mayoría de los casos sea suficiente sólo la transformación regional con los parámetros oficiales del IGAC (tablas 6.1, 6.2 y 6.3).



Tabla II.1 Conversión de coordenadas referidas al Datum BOGOTÁ como preparación para su transformación a **MAGNA-SIRGAS**.

Coordenadas referidas al Datum BOGOTÁ											
Información Original (ítem a)			ítem b			ítem c					
Punto	Norte [m]	Este [m]	Latitud (N) [° ‘ “]		Longitud (W) [° ‘ “]		X [m]	Y [m]	Z [m]		
CC-01	89 085,522	96 787,118	4	30	1.50	74	6	35.64	1 741 705,883	-6 118 318,013	497 334,582
CC-02	89 079,420	96 371,248	4	30	1.30	74	6	49.12	1 741 306,030	-6 118 432,322	497 328,522
CC-03	8 9994,281	96 291,264	4	30	31.07	74	6	51.71	1 741 209,477	-6 118 385,096	498 240,556
CC-04	89 925,438	96 946,662	4	30	28.83	74	6	30.46	1 741 841,315	-6 118 210,878	498 171,891
CC-05	89 599,983	97 150,306	4	30	18.24	74	6	23.86	1 742 044,160	-6 118 179,714	497 847,431
CC-06	89 553,188	97 548,305	4	30	16.72	74	6	10.96	1 742 427,945	-6 118 074,248	497 800,755
CC-07	89 627,914	99 618,552	4	30	19.14	74	5	3.83	1 744 417,326	-6 117 501,233	497 875,085
CC-08	88 891,617	94 940,792	4	29	55.19	74	7	35.50	1 739 934,187	-6 118 837,894	497 141,359
CC-09	88 770,421	95 353,623	4	29	51.25	74	7	22.12	1 740 333,869	-6 118 734,111	497 020,522
CC-10	88 324,674	95 395,946	4	29	36.74	74	7	20.75	1 740 384,119	-6 118 756,142	496 576,147



Tabla II.2 Coordenadas transformadas, del Datum BOGOTÁ a **MAGNA-SIRGAS**, utilizando el modelo Molodensky-Badekas, con refinación mediante una transformación bidimensional afin.

Coordenadas referidas al Sistema MAGNA-SIRGAS										
ítem d				ítem e			ítem f		ítem g	
Punto	X [m]	Y [m]	Z [m]	Latitud (N) [° ' "]	Longitud (W) [° ' "]	Norte Trans [m]	Este Trans [m]	Norte Refin [m]	Este Refin [m]	
CC-01	1 742 008,388	-6 117 999,917	497 015,453	4 29 51.25	74 6 23.38	89 085,84	96 786,59	89 085,84	96 786,63	
CC-02	1 741 608,538	-6 118 114,230	497 009,394	4 29 51.06	74 6 36.87	89 079,74	96 370,72	89 079,74	96 370,76	
CC-03	1 741 511,986	-6 118 066,994	497 921,427	4 30 20.83	74 6 39.46	89 994,60	96 290,75	89 994,60	96 290,78	
CC-04	1 742 143,820	-6 117 892,768	497 852,757	4 30 18.59	74 6 18.21	89 925,75	96 946,14	89 925,75	96 946,18	
CC-05	1 742 346,663	-6 117 861,606	497 528,298	4 30 7.99	74 6 11.60	89 600,30	97 149,79	89 600,30	97 149,83	
CC-06	1 742 730,446	-6 117 756,136	497 481,620	4 30 6.47	74 5 58.70	89 553,50	97 547,78	89 553,50	97 547,83	
CC-07	1 744 719,815	-6 117 183,094	497 555,937	4 30 8.90	74 4 51.57	89 628,20	99 618,02	89 628,21	99 618,11	
CC-08	1 740 236,703	-6 118 519,823	496 822,241	4 29 44.95	74 7 23.25	88 891,95	94 940,27	88 891,95	94 940,28	
CC-09	1 740 636,382	-6 118 416,036	496 701,402	4 29 41.00	74 7 9.86	88 770,75	95 353,10	88 770,75	95 353,12	
CC-10	1 740 686,632	-6 118 438,073	496 257,028	4 29 26.50	74 7 8.49	88 325,01	95 395,42	88 325,01	95 395,44	



Determinación de los parámetros de una transformación bidimensional afín.

Considerando que los parámetros de transformación regionales proporcionados por el IGAC pueden no ofrecer la suficiente precisión requerida por datos espaciales representados a escalas grandes (1:500 ... 1:5000), en algunas ocasiones los productores y usuarios de esta información deberán calcular los parámetros de la transformación bidimensional afín de refinamiento a partir de sus propios datos. Dentro de este contexto, a continuación se presenta un ejemplo numérico.

El plano digital de una ciudad colombiana debe ser migrado del Datum BOGOTÁ al sistema **MAGNA-SIRGAS**. Para el efecto, se genera un archivo en formato txt con las coordenadas cartesianas de todos los detalles incluidos en dicho plano. Estas coordenadas son transformadas siguiendo el modelo Molodensky-Badekas y los parámetros regionales calculados por el IGAC. Sin embargo, algunos de los detalles del plano fueron ocupados directamente en campo con GPS y, las coordenadas cartesianas derivadas a partir de dicho levantamiento presentan ciertas discrepancias con las coordenadas transformadas empíricamente. Como solución, se opta por calcular una transformación bidimensional afín que permita refinar la transformación regional.

a. Coordenadas derivadas del levantamiento GPS en campo vs. las transformadas:

Punto	Coordenadas obtenidas después de la transformación según Molodensky-Badekas		Coordenadas derivadas del posicionamiento GPS en campo	
	N [m]	E [m]	N [m]	E [m]
1	114 052,318	107 671,727	114 052,492	107 671,708
2	114 502,130	99 610,390	114 502,181	99 610,351
3	124 245,709	95 389,507	124 245,588	95 389,216
4	91 385,922	100 463,445	91 385,923	100 463,668
5	95 562,673	97 306,236	95 562,656	97 306,434
6	111 365,417	92 683,287	111 365,329	92 683,239
7	49 573,752	78 165,416	49 573,847	78 165,290
8	42 952,333	89 503,405	42 952,291	89 503,255
9	79 719,800	95 933,097	79 719,632	95 933,384
10	35 573,652	86 114,169	35 573,675	86 114,159
11	55 693,133	82 188,904	55 693,225	82 188,877



- b. Las ecuaciones (6.5a) y (6.5b) pueden representarse matricialmente, para un punto, mediante:

$$\begin{bmatrix} E \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E' & N' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E' & N' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

siendo:

[N', E']: Coordenadas planas derivadas de la latitud (φ) y longitud (λ) transformadas al utilizar los parámetros Molodensky-Badekas

[N, E]: Coordenadas planas derivadas de la latitud (φ) y longitud (λ) observadas directamente con GPS en terreno.

Dicha relación matricial equivale a:

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} \mathbf{X}$$

cuya solución está dada por

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{L})$$

siendo los residuales

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{L}$$

Las matrices correspondientes al presente ejemplo se muestran en la tabla II.3.

Los mayores residuales se presentan en la coordenada Este de los puntos 3, 8 y 9. Para conseguir mayor concordancia con los datos en campo, podrían excluirse estos tres puntos y repetir el procedimiento nuevamente, hasta alcanzar magnitudes menores en el vector \mathbf{V} . No obstante, el número de iteraciones del procedimiento se deja a discreción de la precisión final deseada, siendo en este caso, el orden de los valores alcanzados (~ 20 cm) suficiente.

Tabla II.3 Matrices consideradas en la determinación de los parámetros de una transformación bidimensional afin.

$A =$	107671,727	114052,318	1	0	0	0	$L =$	107671,708	$X =$	0.147
	0	0	0	-107671,727	114052,318	1		114052,492		-0.171
	99610,390	114502,130	1	0	0	0		99610,351		0.038
	0	0	0	-99610,390	114502,130	1		114502,181		-0.066
	95389,507	124245,709	1	0	0	0		95389,216		0.193
	0	0	0	-95389,507	124245,709	1		124245,588		0.087
	100463,445	91385,922	1	0	0	0		100463,668		-0.134
	0	0	0	-100463,445	91385,922	1		91385,923		0.008
	97306,236	95562,673	1	0	0	0		97306,434		-0.173
	0	0	0	-97306,236	95562,673	1		95562,656		0.015
	92683,287	111365,417	1	0	0	0		92683,239		-0.052
	0	0	0	-92683,287	111365,417	1		111365,329		0.059
	78165,416	49573,752	1	0	0	0		78165,290		-0.003
	0	0	0	-78165,416	49573,752	1		49573,847		-0.097
	89503,405	42952,333	1	0	0	0		89503,255		0.223
	0	0	0	-89503,405	42952,333	1		42952,291		0.072
	95933,097	79719,800	1	0	0	0		95933,384		-0.233
	0	0	0	-95933,097	79719,800	1		79719,632		0.178
	86114,169	35573,652	1	0	0	0		86114,159		0.053
	0	0	0	-86114,169	35573,652	1		35573,675		0.007
82188,904	55693,133	1	0	0	0	82188,877	-0.058			
0	0	0	-82188,904	55693,133	1	55693,225	-0.091			



Transformación del Datum BOGOTÁ a *MAGNA-SIRGAS* de un conjunto de datos espaciales utilizando la transformación bidimensional a partir de coordenadas elipsoidales.

Se desea migrar las coordenadas elipsoidales de 10 puntos definidas sobre el Datum BOGOTÁ al sistema *MAGNA-SIRGAS*. Con el propósito de presentar la evaluación numérica de las ecuaciones (6.7a) y (6.7b), se detallará el procedimiento para uno de los puntos y luego se presentará el resultado para la totalidad de ellos. Los parámetros de transformación a utilizar corresponden con los de la región VIII (tabla 6.3).

a. Coordenadas elipsoidales originales en Datum BOGOTÁ:

Punto	Latitud (N) [° ‘ “]	Longitud (W) [° ‘ “]
CC-01	4 30 1,50	74 6 35,64
CC-02	4 30 1,30	74 6 49,12
CC-03	4 30 31,07	74 6 51,71
CC-04	4 30 28,83	74 6 30,46
CC-05	4 30 18,24	74 6 23,86
CC-06	4 30 16,72	74 6 10,96
CC-07	4 30 19,14	74 5 3,83
CC-08	4 29 55,19	74 7 35,50
CC-09	4 29 51,25	74 7 22,12
CC-10	4 29 36,74	74 7 20,75

b. Transformación del punto CC-01

Descripción	Valor
<i>Datos de entrada</i>	
Latitud del punto origen en Datum BOGOTÁ	$\varphi_F = 4^\circ 35' 56,57''$ N
Longitud del punto origen en Datum BOGOTÁ	$\lambda_F = 74^\circ 4' 51,30''$ W
Latitud del punto de cálculo en Datum BOGOTÁ	$\varphi = 4^\circ 30' 1,50''$ N
Longitud del punto de cálculo en Datum BOGOTÁ	$\lambda = 74^\circ 6' 35,64''$ W
Diferencia entre los parámetros de los elipsoides asociados a MAGNA-SIRGAS (GRS80) y al Datum BOGOTÁ (Internacional)	da = -251 m df = -1,419 269 E-05
Parámetros de transformación	$\delta\varphi_F = -10,249''$; $\delta\lambda_F = 12,272''$
<i>Cambio en latitud</i>	
$(\cos \varphi_F \cos \varphi + \sin \varphi_F \sin \varphi \cos(\lambda - \lambda_F)) \delta\varphi_F$	-10,248 984 806 331
$\sin \varphi \sin(\lambda - \lambda_F) \cos \varphi_F \delta\lambda_F$	-4,855 320 606 E-04
$(\sin \varphi_F \cos \varphi - \cos \varphi_F \sin \varphi \cos(\lambda - \lambda_F))$	1,721 432 553 E-03
$\left(\frac{dh_F}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2 \varphi_F df \right)$	-3,944 288 330 E-05
$2 \cos \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_F) df$	4,855 907 955 E-08
Cambio en latitud	$\delta\varphi = -10,248''$
Latitud transformada	$\varphi' = \varphi + \delta\varphi = 4^\circ 29' 51,25''$ N
<i>Cambio en longitud</i>	
$\sin \varphi_F \sin(\lambda - \lambda_1) \delta\varphi_F$	4,156 999 514 E-04
$\cos(\lambda - \lambda_F) \cos \varphi_F \delta\lambda_F$	12,232 485 196 078
$\cos \varphi_F \sin(\lambda - \lambda_F) \left(\frac{dh_F}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2 \varphi_F df \right)$	1,988 784 695 E-08
Cambio en longitud	$\delta\lambda = 12,271''$
Longitud transformada	$\lambda' = \lambda + \delta\lambda = 74^\circ 6' 23,368''$ W

c. Coordenadas transformadas (*MAGNA-SIRGAS*)

Punto	Latitud (N) [° ‘ “]	Longitud (W) [° ‘ “]
CC-01	4 29 51,25	74 6 23,37
CC-02	4 29 51,05	74 6 36,85
CC-03	4 30 20,83	74 6 39,44
CC-04	4 30 18,58	74 6 18,19
CC-05	4 30 7,99	74 6 11,59
CC-06	4 30 6,47	74 5 58,69
CC-07	4 30 8,90	74 4 51,56
CC-08	4 29 44,95	74 7 23,23
CC-09	4 29 41,00	74 7 9,85
CC-10	4 29 26,50	74 7 8,48

Los puntos transformados en este ejemplo corresponden con los presentados en la tabla II.2, columnas del ítem e. Las diferencias en las coordenadas transformadas obtenidas al aplicar el método de Molodensky-Badekas o el bidimensional con coordenadas elipsoidales alcanza la segunda centésima de los segundos. De acuerdo con esto y teniendo presente la precisión de los datos a migrar, el usuario debe establecer la conveniencia del método a utilizar.



ANEXO III: OBTENCIÓN DE ALTURAS SOBRE EL NIVEL MEDIO DEL MAR A PARTIR DE INFORMACIÓN GPS

CONTENIDO

Metodología en campo	79
Metodología en oficina	82
Ejemplos numéricos	83

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura III.1. Determinación de la altura de un punto sobre el nivel medio del mar a partir de datos GPS	80
Figura III.2. Determinación de la altura snmm a partir de datos GPS y el modelo geoidal GEOCOL para los puntos contenidos en un perfil.	81
Figura III.3. Determinación de la altura snmm a partir de información GPS y el modelo geoidal GEOCOL para puntos distribuidos en un área	82
Figura III.4. Representación esquemática de la determinación de la altura snmm para un punto a partir de datos GPS	83
Figura III-5. Representación esquemática de la determinación de la altura snmm derivada de datos GPS para puntos contenidos en un perfil	89

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla III-1. Alturas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura snmm de un punto a partir de datos GPS	84
Tabla III-2. Alturas relativas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura snmm de un punto a partir de datos GPS	84
Tabla III-3. Alturas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura snmm para puntos contenidos en un perfil a partir de datos GPS	87
Tabla III-4. Alturas relativas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura sobre el nivel medio del mar a partir de datos GPS para puntos contenidos en un perfil	87
Tabla III-5. Alturas snmm derivadas de datos GPS y sus diferencias relativas	88
Tabla III-6. Alturas snmm derivadas de datos GPS para los puntos contenidos en un perfil	90

Anexo III: OBTENCIÓN DE ALTURAS SOBRE EL NIVEL MEDIO DEL MAR A PARTIR DE INFORMACIÓN GPS

El sistema de posicionamiento global GPS puede ser empleado en la extensión del control vertical sobre aquellas zonas en donde no se cuenta con puntos de nivelación y la precisión requerida está dentro del orden trigonométrico. Las posibilidades de operabilidad en cualesquiera hora, condiciones climáticas y del relieve permiten que el sistema GPS, unido a un modelo geoidal de alta resolución, sea una herramienta poderosa y económica en la determinación de nuevos puntos de referencia para propósitos geodésicos o topográficos. La presente sección tiene por objeto proporcionar orientación acerca del trabajo de campo y oficina, necesarios para la obtención de alturas equivalentes a las niveladas.

Metodología en campo

Antes de exponer algunos posibles casos a resolver, es necesario puntualizar sobre aspectos básicos del rastreo:

- a. El tiempo mínimo de rastreo sobre un punto debe ser de 15 minutos contados a partir de la estabilización del equipo y la disponibilidad mínima de 4 satélites.
- b. Por cada kilómetro de distancia a la base se hacen 5 minutos adicionales. En casos en que la configuración del sistema sea excelente, el tiempo adicional por cada kilómetro puede reducirse a 3 minutos.
- c. No debe haber tiempos de rastreo menores que 18 minutos.
- d. Debe evitarse realizar rastreos sobre distancias mayores que 20 km. En los casos en que estas condiciones no se puedan cumplir, es necesario aumentar los tiempos de rastreo de acuerdo con lo planteado en el ítem a.
- e. Se sugiere, como una forma de mejorar los resultados, ejecutar rastreos dobles sobre cada punto.
- f. Los NPs ocupados deben ser, preferiblemente, de primer orden.

Caso 1. PUNTO: Determinación de la altura de un punto sobre el nivel medio del mar (snmm) a partir de información GPS y el modelo geoidal GEOCOL.

- a. Se toma como base inicial el punto **MAGNA-SIRGAS** más cercano al área del proyecto.
- b. Se seleccionan al menos dos estaciones de nivel NP a las cuales se les traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en el ítem a. De este modo, se definen valores de latitud, longitud, altura elipsoidal (h), altura snmm (H) y ondulación geoidal (N) a partir del modelo GEOCOL para cada NP y el punto base (figura III.1).



- c. Los dos NPs rastreados servirán como base para la determinación de cota del punto nuevo con altura desconocida (rover).

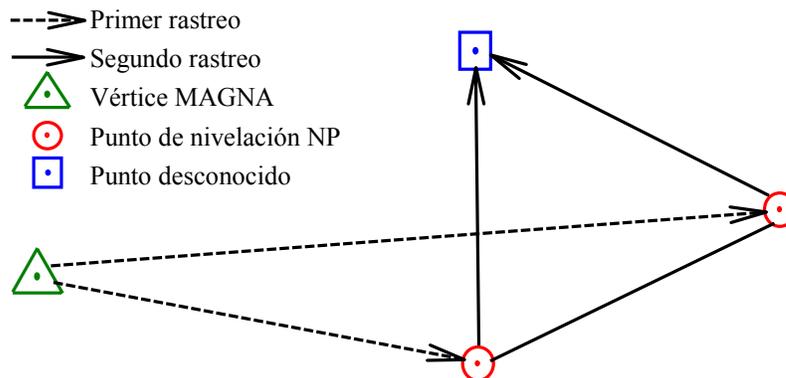


Figura III.1. Determinación de la altura de un punto sobre el nivel medio del mar a partir de datos GPS

Los criterios de planeación y tiempos de rastreo se mantienen y la selección de la base estará en función de las conveniencias del proyecto. Los datos que deben utilizarse en oficina para obtener la altura snmm por medio de GPS (H_{GPS}) del punto nuevo son: Altura elipsoidal (h) del vértice geodésico, de los NPs y del punto nuevo; altura nivelada (H) de los NPs, y la ondulación geoidal (N GEOCOL) de todos los puntos involucrados.

Caso 2. PERFIL: Determinación de alturas snmm para una serie de puntos dispuestos a lo largo de un perfil a partir de información GPS y el modelo geoidal GEOCOL.

- Se toma como base inicial el punto **MAGNA-SIRGAS** más cercano al área del proyecto.
- Se selecciona un NP al cual se le traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en el ítem a, definiéndole valores de latitud, longitud, altura elipsoidal (h), altura snmm (H) y ondulación geoidal (N) a partir del modelo GEOCOL. Este NP se constituye en la nueva base para el rastreo del perfil.
- Para rastrear el perfil es necesario dividirlo en circuitos, cuyas longitudes se definen por la distancia horizontal entre la base y las estaciones ubicadas dentro de los siguientes 20 km. Alcanzada esta distancia, debe definirse una nueva base, la cual es el último punto del circuito inmediatamente anterior (figura III.2).
- En el proceso se repiten los pasos b y c hasta finalizar la línea.
- El último punto rastreado en el proyecto debe ser un NP de tipo geodésico.

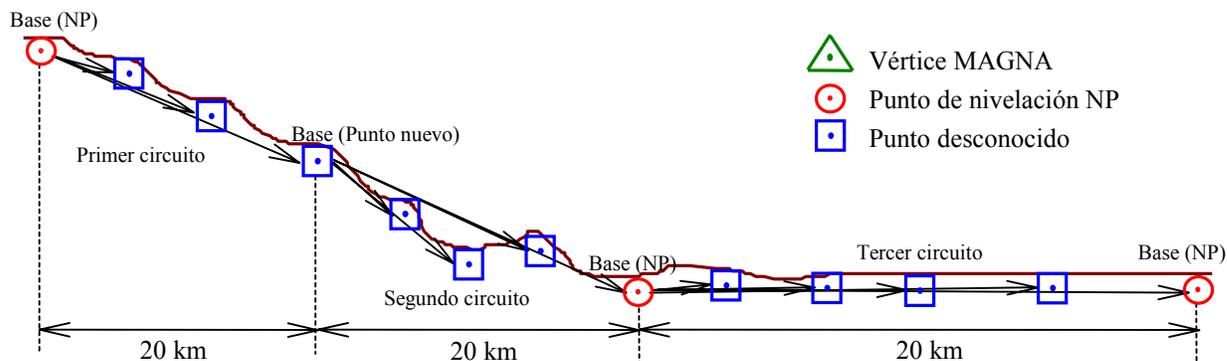


Figura III.2. Determinación de la altura snmm a partir de datos GPS y el modelo geoidal GEOCOL para los puntos contenidos en un perfil.

Si existen más NPs cercanos al área del proyecto, éstos deben involucrarse como bases en el rastreo de los diferentes circuitos.

Los datos que se utilizan en oficina para calcular la altura snmm a partir de información GPS (H_{GPS}) de los puntos nuevos son: Altura elipsoidal (h) y ondulación geoidal (N GEOCOL) de todos los puntos ocupados y la altura nivelada (H) de los puntos NP.

Caso 3. SUPERFICIE: Determinación de alturas snmm a partir de información GPS y el modelo geoidal GEOCOL para puntos distribuidos en un área.

- Se toma como base inicial el punto **MAGNA-SIRGAS** más cercano al área del proyecto.
- Se seleccionan por lo menos cuatro (4) NPs, a los cuales se les traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en el ítem a, definiéndoles valores de latitud, longitud, altura elipsoidal (h), altura nivelada (H) y la ondulación geoidal (N) a partir del modelo GEOCOL. Estos NPs se constituyen en las nuevas bases para el rastreo de los puntos contenidos en la superficie (figura III.3).
- De acuerdo con las condiciones locales, se determinará la distribución de los puntos a rastrear por cada día, manteniendo las especificaciones básicas de duración y distancia.
- Para cada día, es necesario que la base tenga altura definida sobre el nivel medio del mar.

Una superficie puede considerarse como un conjunto de perfiles, cuyas bases y puntos finales deben ser NPs.

Los datos que permiten obtener la altura snmm por medio de GPS (H_{GPS}) de los puntos nuevos son: Altura elipsoidal (h) y ondulación geoidal (N GEOCOL) de todos los puntos utilizados y la altura nivelada (H) de los puntos NP.

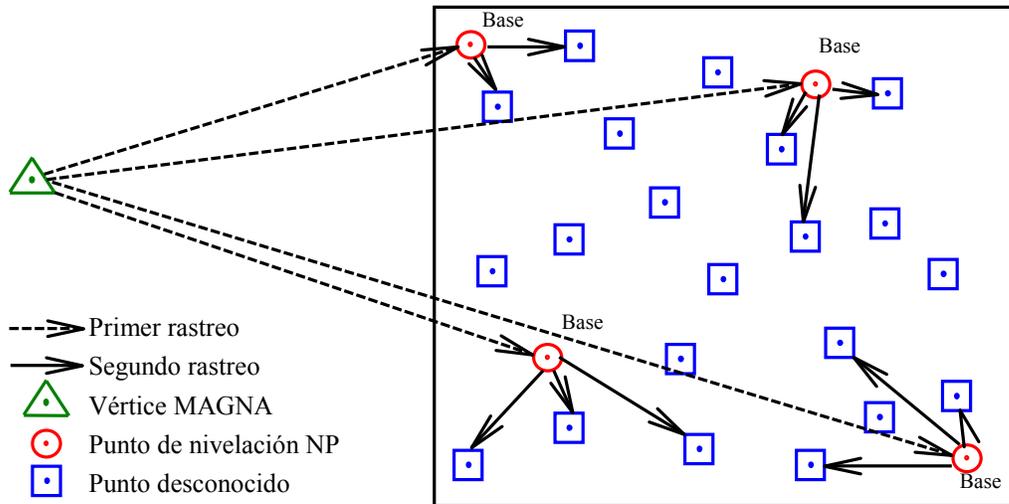


Figura III.3. Determinación de la altura snmm a partir de información GPS y el modelo geoidal GEOCOL para puntos distribuidos en un área.

Metodología en oficina

Una vez recopilada la información en campo y procesadas las coordenadas **MAGNA-SIRGAS**, latitud (ϕ), longitud (λ) y altura elipsoidal (h), de cada estación rastreada, la determinación de alturas snmm a partir de datos GPS y el modelo geoidal GEOCOL puede hacerse según el siguiente procedimiento:

- a. Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales de la base (h_{Base}) y sus rover (h_{Ri}) correspondientes:

$$\Delta h_i = h_{Ri} - h_{Base} \quad (III.1)$$

- b. Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre la base (N_{Base}) y sus rover (N_{Ri}) correspondientes:

$$\Delta N_i = N_{Ri} - N_{Base} \quad (III.2)$$

- c. Determinación de las diferencias de alturas snmm GPS (ΔH_{GPSi}) entre la base y sus rover correspondientes:

$$\Delta H_{GPSi} = \Delta h_i - \Delta N_i \quad (III.3)$$

- d. Cálculo de las alturas snmm iniciales (H°_{GPSi}) de los puntos desconocidos:

$$H^{\circ}_{GPSi} = H_{Base} + \Delta H_i \quad (III.4)$$

- e. Determinación de las diferencias de alturas snmm GPS iniciales (H°_{GPSi}) entre estaciones consecutivas:

$$\Delta H^{\circ}_{GPS} = \Delta H_i - \Delta H_{i-1} \quad (III.5)$$

éstas deben ser ajustadas a partir de los valores de altura nivelados en las bases.

- f. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GPS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

$$\mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0 \quad (III.6)$$

siendo:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{BP}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{W} \quad (III.7)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{C} - \mathbf{BL}^b \quad (III.8)$$

donde:

$\mathbf{B} = \mathbf{b}_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición, $\mathbf{P} = \mathbf{p}_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones, $\mathbf{L} = \mathbf{l}_{m,1}$: Vector de las observaciones, $\mathbf{C} = \mathbf{c}_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición y $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_i)_{(i=1,2,\dots,n)}$: Vector de las desviaciones de las cantidades observadas.

- g. Determinación de las alturas snmm finales para los puntos nuevos:

$$H_{GPS-Final} = H_{Nivelada\ de\ la\ base} + \Delta H_i\ Ajustado \quad (III.9)$$

Debe tenerse presente que la precisión de las alturas así obtenidas está en torno a los 80 cm.

Ejemplos numéricos

A continuación se presenta un ejemplo, del procesamiento de datos en oficina, por cada uno de los casos citados en la metodología de campo.

Caso 1. PUNTO: Determinación de la altura de un punto snmm a partir de información GPS y el modelo geoidal GEOCOL



Se desea conocer la altura snmm del punto geodésico TG13 a partir del vértice CODAZZI y los NPs 6E1, B9S1, 86CM14 y 90CM14. Las coordenadas **MAGNA-SIRGAS** de éstos ya han sido calculadas y ajustadas. Las diferentes alturas de cada punto se ilustran en la tabla III.1.

Tabla III-1. Alturas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura snmm de un punto a partir de datos GPS (Caso 1).

Punto	Altura elipsoidal (h)	Altura GEOCOL (N)	Altura nivelada
Vértice CODAZZI	2610,8160 m	21,5668 m	2588,5523 m
NP 6E1	2697,2876 m	20,9002 m	2673,2700 m
NP B9S1	2580,7914 m	20,8347 m	2557,3867 m
NP 86CM14	2575,7611 m	20,9812 m	2552,5900 m
NP 90CM14	2577,5087 m	20,9799 m	2553,9538 m
Punto TG13	3217,8420 m	21,5469 m	A determinar

- a. Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales del punto de cálculo y las estaciones con altura conocida: $\Delta h_i = h_{TG13} - h_{NPi}$ (tabla III.2)
- b. Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre el punto de cálculo y las estaciones con altura conocida: $\Delta N_i = N_{TG13} - N_{NPi}$ (tabla III.2)
- c. Determinación de las diferencias de alturas snmm provenientes del GPS (ΔH_{GPSi}) entre el punto de cálculo y las estaciones con altura conocida: $\Delta H_{GPSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$ (tabla III.2)

Tabla III-2. Alturas relativas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura snmm de un punto a partir de datos GPS (Caso 1).

Estaciones	$\Delta h_i = h_{TG13} - h_{NPi}$	$\Delta N_i = N_{TG13} - N_{NPi}$	$\Delta H_{GPSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$
TG13 - CODAZZI	607,0263 m	-0,0199 m	607,0462 m
TG13 - NP 90CM14	640,3333 m	0,5670 m	639,7663 m
TG13 - NP B9S1	637,0506 m	0,7122 m	636,3384 m
TG13 - NP 6E1	520,5544 m	0,6467 m	519,9077 m
TG13 - NP 86CM14	642,0809 m	0,5657 m	641,5152 m

Una vez determinadas las alturas relativas entre el punto desconocido (TG13) y las estaciones con valor de altura, el problema se representa esquemáticamente (figura III.4) para facilitar el diseño del ajuste por mínimos cuadrados.

- d. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GPS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

Formulación de las ecuaciones de condición:

La cantidad de ecuaciones de condición que deben plantearse es igual al número de estaciones con altura conocida (5) menos el número de estaciones con altura desconocida (1), en este caso deben formularse cuatro (4) ecuaciones:

$$\begin{aligned} (l_a + v_a) - (l_c + v_c) &= H_{nivC} - H_{nivA} = -31,1656 \\ (l_e + v_e) - (l_b + v_b) &= H_{nivB} - H_{nivE} = 1,3638 \\ (l_a + v_a) - (l_d + v_d) &= H_{nivD} - H_{nivA} = 84,7177 \\ (l_e + v_e) - (l_c + v_c) &= H_{nivC} - H_{nivE} = 4,7967 \end{aligned}$$

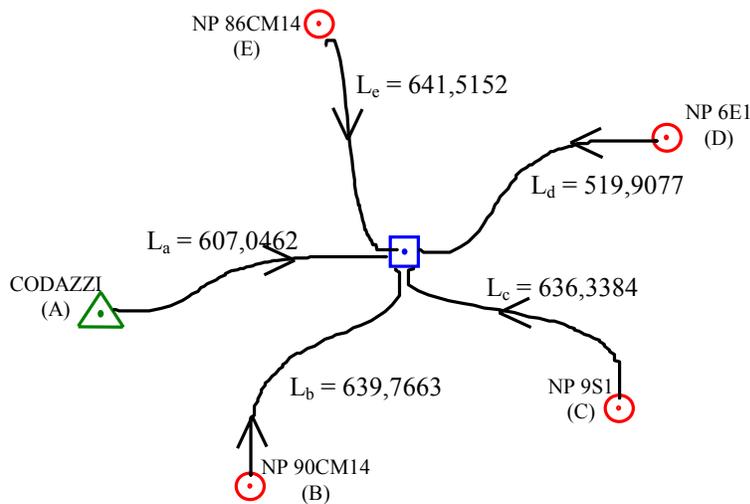


Figura III.4. Representación esquemática de la determinación de la altura snmm para un punto a partir de datos GPS (Caso 1).

Planteamiento de las matrices:

B = $b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición.

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

P = $p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones. En este caso se considera que las observaciones fueron realizadas bajo condiciones iguales, por lo tanto la matriz P es idéntica.

C = $c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición.

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} -31,1656 \\ 1,3638 \\ 84,7177 \\ 4,7967 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{L} = \mathbf{l}_{m,1}$: Vector de las observaciones.

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} 607,0462 \\ 639,7663 \\ 636,3384 \\ 519,9077 \\ 641,5152 \end{vmatrix}$$

Solución:

Una vez planteadas la matrices se desarrollan las siguientes operaciones:

$$\mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{BP}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{W}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{C} - \mathbf{BL}$$

Así, se obtienen las desviaciones (v_i) de las observaciones realizadas.

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} -1,53318 \\ 0,34522 \\ 0,34022 \\ 0,88762 \\ -0,03988 \end{vmatrix}$$

Las observaciones corregidas corresponden con: $\mathbf{L}^* = \mathbf{L} + \mathbf{V}$:

$$\mathbf{L}^* = \begin{vmatrix} 605,5130 \\ 640,1115 \\ 636,6786 \\ 520,7953 \\ 641,4753 \end{vmatrix}$$

e. Determinación de la altura snmm final:

La altura snmm proveniente de datos GPS para el punto TG13 será igual a la altura nivelada de cualquiera de los puntos considerados más su correspondiente diferencia ajustada:

$$H_{\text{GPS TG13}} = H_{\text{niv CODAZZI}} + L^*_{\text{A}} = 2588,5523 + 605,5130 = 3194,0653$$

$$H_{\text{GPS TG13}} = H_{\text{niv 90CM14}} + L^*_{\text{B}} = 2553,9538 + 640,1115 = 3194,0653$$



$$\begin{aligned} H_{GPS\ TG13} &= H_{niv\ B9S1} + L^*_C = 2557,3867 + 636,6786 = 3194,0653 \\ H_{GPS\ TG13} &= H_{niv\ 6E1} + L^*_D = 2673,2700 + 520,7953 = 3194,0653 \\ H_{GPS\ TG13} &= H_{niv\ 86CM14} + L^*_E = 2552,5900 + 641,4753 = 3194,0653 \end{aligned}$$

Caso 2. PERFIL: Determinación de alturas snmm para una serie de puntos dispuestos a lo largo de un perfil a partir de información GPS y el modelo geoidal GEOCOL.

Se quiere determinar la altura snmm a partir de información GPS de los puntos B70NW1, B72NW1, B75NW1, A76NW1, B78NW1 y B86NW1, utilizando las alturas niveladas de los NPs A68NW1 y B88NW1. Las coordenadas **MAGNA-SIRGAS** de éstos ya han sido calculadas y ajustadas. Las diferentes alturas de cada punto se ilustran en la tabla III-3.

Tabla III-3. Alturas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura snmm para puntos contenidos en un perfil a partir de datos GPS (Caso 2).

Punto	Altura elipsoidal (h)	Altura GEOCOL (N)	Altura nivelada
NP A68NW1 Base	1520,9080 m	23,1217 m	1502,2687 m
NP B70NW1	1424,8843 m	23,1191 m	A determinar
NP B72NW1	1171,8970 m	23,1193 m	A determinar
NP B75NW1	997,0633 m	23,1102 m	A determinar
NP A76NW1	1071,1215 m	23,1076 m	A determinar
NP B78NW1	1252,3064 m	23,1025 m	A determinar
NP B86NW1	805,4677 m	23,0916 m	A determinar
NP B88NW1	626,1350 m	22,8113 m	608,3497 m

- Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales de la base (h_{Base}) y sus rover (h_{Ri}) correspondientes: $\Delta h_i = h_{Ri} - h_{Base}$ (tabla III-4)
- Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre la base (N_{Base}) y sus rover (N_{Ri}) correspondientes: $\Delta N_i = N_{Ri} - N_{Base}$ (tabla III-4)
- Determinación de las diferencias de alturas snmm provenientes de datos GPS (ΔH_{GPSi}) entre la base y sus rover correspondientes: $\Delta H_{GPSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$ (tabla III-4)

Tabla III-4. Alturas relativas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura sobre el nivel medio del mar a partir de datos GPS para puntos contenidos en un perfil (Caso 2).

Estaciones	$\Delta h_i = h_{Ri} - h_{Base}$	$\Delta N_i = N_{Ri} - N_{Base}$	$\Delta H_{GPSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$
B70NW1 - A68NW1	-96,0237 m	-0,0260 m	-96,2110 m
B72NW1 - A68NW1	-349,1100 m	-0,0240 m	-349,0086 m
B75NW1 - A68NW1	-523,8447 m	-0,0024 m	-523,8423 m

A76NW1 - A68NW1	-449,7865 m	-0,0141 m	-449,7724 m
B78NW1 - A68NW1	-268,6016 m	-0,0192 m	-268,5824 m
B86NW1 - A68NW1	-715,4403 m	-0,0301 m	-715,4102 m
B88NW1 - A68NW1	-894,7730 m	-0,3104 m	-894,4626 m

- d. Cálculo de las alturas snmm derivadas de datos GPS iniciales (H°_{GPSi}) para los puntos desconocidos: $H^{\circ}_{GPSi} = H_{Base} + \Delta H_i$ (tabla III-5).
- e. Determinación de las diferencias de alturas snmm iniciales (H°_{GPSi}) entre estaciones consecutivas: $\Delta H^{\circ}_{GPS} = \Delta H_i - \Delta H_{i-1}$ (tabla III-5).

Tabla III-5. Alturas snmm derivadas de datos GPS y sus diferencias relativas (Caso 2)

Punto	Altura snmm GPS inicial (H°_{GPSi})	$\Delta H^{\circ}_{GPS} = \Delta H_i - \Delta H_{i-1}$
NP A68NW1 Base	1502,26867 m	
NP B70NW1	1406,05767 m	-96,2110
NP B72NW1	1153,26007 m	-252,7976
NP B75NW1	978,42637 m	-174,8337
NP A76NW1	1052,49627 m	74,0699
NP B78NW1	1233,68627 m	181,1900
NP B86NW1	786,85847 m	-446,8278
NP B88NW1	607,80607 m	-179,0524

Una vez determinadas las alturas relativas entre los diferentes puntos, el problema se representa esquemáticamente (figura III-5) para facilitar el diseño del ajuste por mínimos cuadrados.

- f. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GPS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

Ecuaciones de condición:

$$-(l_a + v_a) - (l_b + v_b) - (l_c + v_c) + (l_d + v_d) + (l_e + v_e) - (l_f + v_f) - (l_g + v_g) = H_{B88} - H_{A68}$$

$$H_{B88} - H_{A68} = -893,919 \text{ m}$$

Planteamiento de las matrices:

B = $b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición.

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{P} = \mathbf{p}_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones. En este caso se considera que las observaciones fueron realizadas bajo condiciones iguales, por lo tanto la matriz \mathbf{P} es idéntica.

$\mathbf{C} = \mathbf{c}_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición.

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} -893,919 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{L} = \mathbf{l}_{m,1}$: Vector de las observaciones.

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} 96,2110 \\ 252,7976 \\ 174,8337 \\ 74,0699 \\ 181,1900 \\ 446,8278 \\ 179,0524 \end{vmatrix}$$

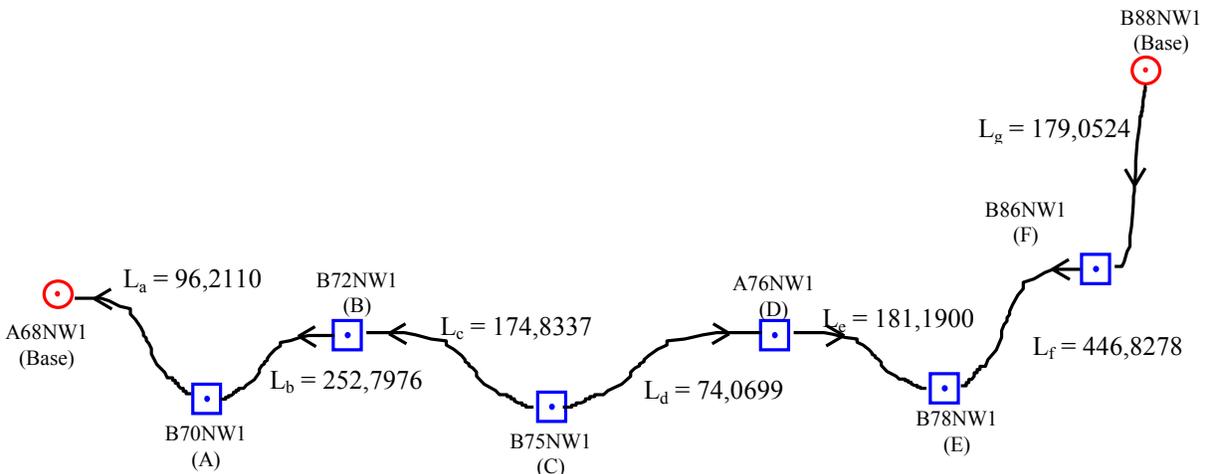


Figura III-5. Representación esquemática de la determinación de la altura smmm derivada de datos GPS para puntos contenidos en un perfil (Caso 2).

Solución:

Una vez planteadas la matrices se desarrollan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{BV} + \mathbf{W} &= 0 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{BP}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{W} \\ \mathbf{W} &= \mathbf{C} - \mathbf{BL} \end{aligned}$$

Así, se obtienen las desviaciones (v_i) de las observaciones realizadas.

$$\begin{vmatrix} -0,07755 \end{vmatrix}$$



$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -0,07755 \\ -0,07755 \\ 0,07755 \\ 0,07755 \\ -0,07755 \\ -0,07755 \end{pmatrix}$$

Las observaciones corregidas corresponden con: $\mathbf{L}^* = \mathbf{L} + \mathbf{V}$:

$$\begin{pmatrix} 96,1335 \\ 252,7200 \\ 174,7560 \\ 74,1475 \\ 181,2680 \\ 446,7500 \\ 178,9750 \end{pmatrix}$$

g. Determinación de las alturas snmm para los puntos nuevos (tabla III-6):

$$H_{\text{GPS-Final}} = H_{\text{Nivelada de la base}} + \Delta H_i \text{ Ajustado}$$

Tabla III-6. Alturas snmm derivadas de datos GPS para los puntos contenidos en un perfil (Caso 2)

Punto	ΔH_i Ajustado	$H_{\text{GPS-Final}}$
NP A68NW1 Base		1502,2687 m
NP B70NW1	-96,1335	1406,1352 m
NP B72NW1	-252,7200	1153,4152 m
NP B75NW1	-174,7560	978,6592 m
NP A76NW1	74,1475	1052,8067 m
NP B78NW1	181,2680	1234,0747 m
NP B86NW1	-446,7500	787,3247 m
NP B88NW1	-178,9750	608,3497 m

ANEXO IV: PROCESAMIENTO DE INFORMACIÓN GPS CONSIDERANDO LA VARIACIÓN DE LAS COORDENADAS EN EL TIEMPO (VELOCIDADES) POR EFECTOS GEODINÁMICOS

CONTENIDO

Aplicación de velocidades en levantamientos GPS diferenciales apoyados en puntos <i>MAGNA-SIRGAS</i> monumentados	91
Aplicación de velocidades en levantamientos GPS diferenciales apoyados en estaciones <i>MAGNA-SIRGAS</i> de funcionamiento continuo	94

Anexo IV: PROCESAMIENTO DE INFORMACIÓN GPS CONSIDERANDO LA VARIACIÓN DE LAS COORDENADAS EN EL TIEMPO (VELOCIDADES) POR EFECTOS GEODINÁMICOS

La determinación de coordenadas mediante sistemas satelitales, entre ellos el GPS (Global Positioning System), ofrece niveles de precisión lo suficientemente altos como para determinar el cambio de la posición de un mismo punto a través del tiempo. Dicho cambio se ha denominado convencionalmente *velocidad de las coordenadas*. Estas velocidades son resultado de la dinámica terrestre (movimientos tectónicos, variación de la orientación de la Tierra en el espacio, etc.) y sus magnitudes pueden alcanzar varios centímetros en un año. Por tal razón, en los sistemas de referencia modernos un punto geodésico se describe mediante cuatro coordenadas: las geocéntricas $[X, Y, Z]$ o curvilíneas $[\varphi, \lambda, h]$ junto con la época de referencia t_0 (tiempo para el cual estos tres valores son válidos).

El sistema de referencia tridimensional en Colombia es **MAGNA-SIRGAS** (Marco Geocéntrico Nacional de Referencia, densificación en Colombia del Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas), el cual es una densificación del marco global ITRF94 (International Terrestrial Reference Frame 1994). Las coordenadas de los vértices **MAGNA-SIRGAS** y de todas aquellas estaciones que han sido determinadas a partir de ellos están definidas en el ITRF94, época 1995.4. Es decir, las coordenadas tridimensionales que la División de Geodesia del Instituto Geográfico Agustín Codazzi certifica a sus usuarios son válidas para el mes de mayo de 1995. Su traslado en el tiempo se adelanta mediante la aplicación de un modelo de velocidades calculado por el proyecto SIRGAS a partir de mediciones geodésicas de alta precisión por más de 15 años.

En un posicionamiento GPS las observaciones se refieren a la época misma de ocupación, por ejemplo, para un levantamiento adelantado en marzo de 2004, la época de las pseudodistancias medidas corresponde con 2004.3. Si dicho levantamiento es diferencial y se apoya en un punto con coordenadas **MAGNA-SIRGAS**, la combinación de los diferentes tiempos (1995.4 y 2004.3) puede generar errores hasta el nivel del decímetro en las posiciones de los puntos nuevos.

Con el propósito de que los usuarios de la geodesia oficial del país obtengan las precisiones requeridas en sus trabajos, el IGAC ha adicionado a sus certificaciones las velocidades correspondientes, las cuales deben ser utilizadas en cualquier procesamiento de información GPS para no desmejorar la calidad de los resultados. A continuación se presenta una breve descripción sobre el procedimiento a seguir.

Aplicación de velocidades en levantamientos GPS diferenciales apoyados en puntos **MAGNA-SIRGAS monumentados.**

Bajo la denominación *punto monumentado* se entiende toda aquella estación materializada por el IGAC que ha sido ocupada con GPS y que, por lo tanto, cuenta con coordenadas tridimensionales **MAGNA-SIRGAS**. En este caso se debe desarrollar la siguiente secuencia:



1. Las coordenadas proporcionadas por el IGAC en la certificación expedida por la División de Geodesia deben trasladarse a la época de observación utilizando las velocidades consignadas en la misma certificación.
2. Se adelanta el procesamiento de la información GPS y se determinan las coordenadas de los puntos nuevos.
3. Utilizando el modelo de velocidades SIRGAS se calcula la velocidad para cada uno de los puntos nuevos y éstos son trasladados a la época de referencia de **MAGNA-SIRGAS**, es decir 1995.4.

Es necesario que las coordenadas de los puntos nuevos sean trasladadas siempre a la época de referencia (1995.4), de lo contrario se presentarán inconsistencias entre proyectos de georreferenciación, cuyas coordenadas estén definidas en diferentes tiempos. El modelo de velocidades SIRGAS se encuentra disponible gratuitamente en <http://www1.ibge.gov.br/home/geografia/geodesico/sirgas/principal.htm>

Ejemplo

A partir del punto IGAC GPS CL001 se determinan dos puntos nuevos mediante posicionamiento diferencial durante días 20 y 21 de abril de 2004.

- a. Época de medición:

El día 20 (21) de abril corresponde con el día número 111 (112) del año, por tanto la época de medición está dada por:

$$\frac{111}{360} = 0,3 \quad \text{y} \quad \frac{112}{360} = 0,3$$

es decir, las observaciones están referidas a la época 2004.3

- b. Traslado de las coordenadas de la estación base a la época de medición:

Las coordenadas y velocidades proporcionadas en la certificación del IGAC (época 1995.4) son:

VÉRTICE: GPS CL001

$\varphi = 05^{\circ} 01' 45,107 53''$ N

$\lambda = 75^{\circ} 27' 52,134 30''$ W

h = 2 123, 912 m

X = 1 595 194,8469 m V_x = 0,0085 m / año



$$\begin{aligned} Y &= -6\,152\,424,4655 \text{ m} & V_y &= 0,0033 \text{ m / año} \\ Z &= 555\,586,4251 \text{ m} & V_z &= 0,0125 \text{ m / año} \end{aligned}$$

La diferencia en tiempo entre la observación y la época de referencia de las coordenadas *MAGNA-SIRGAS* corresponde con:

$$2004.3 - 1995.4 = 8,9 \text{ años}$$

es decir, que el cambio de las coordenadas de la estación base (GPS CL001), según el modelo de velocidades SIRGAS, hasta la época de medición es:

$$\begin{aligned} \Delta x &= (0,0085 \times 8,9) = 0,0757 \text{ m} \\ \Delta y &= (0,0033 \times 8,9) = 0,0294 \text{ m} \\ \Delta z &= (0,0125 \times 8,9) = 0,1113 \text{ m} \end{aligned}$$

Por tanto, las coordenadas del punto GPS CL001 para 2004.3 son:

$$\begin{aligned} X &= (1\,595\,194,8469 + 0,0757) = 1\,595\,194,9226 \text{ m} \\ Y &= (-6\,152\,424,4655 + 0,0294) = -6\,152\,424,4361 \text{ m} \\ Z &= (555\,586,4251 + 0,1113) = 555\,586,5364 \text{ m} \end{aligned}$$

c. Procesamiento de la información GPS:

El levantamiento GPS se procesa convencionalmente utilizando como referencias las coordenadas del punto GPS CL001 para la época 2004.3. Los resultados obtenidos para los puntos nuevos son:

Punto 1:

$$\begin{aligned} \varphi &= 05^\circ 05' 30,12861'' \text{ N} & X &= 1\,598\,475,4542 \text{ m} \\ \lambda &= 75^\circ 26' 03,15081'' \text{ W} & Y &= -6\,151\,696,5703 \text{ m} \\ h &= 2856,356 \text{ m} & Z &= 562\,538,8750 \text{ m} \end{aligned}$$

Punto 2:

$$\begin{aligned} \varphi &= 04^\circ 59' 36,80513'' \text{ N} & X &= 1\,591\,086,7412 \text{ m} \\ \lambda &= 75^\circ 30' 12,00326'' \text{ W} & Y &= -6\,153\,753,2293 \text{ m} \\ h &= 2035,833 \text{ m} & Z &= 551\,651,3878 \text{ m} \end{aligned}$$

d. Traslado de las coordenadas de los puntos nuevos a la época de referencia (1995.4):

Las velocidades anuales para los puntos nuevos según el modelo de velocidades SIRGAS son:

$$\begin{aligned} \text{Punto 1} \\ V_x &= 0,0085 \text{ m / año} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Punto 2} \\ V_x &= 0,0061 \text{ m / año} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}V_y &= 0,0034 \text{ m / año} \\V_z &= 0,0125 \text{ m / año}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_y &= 0,0027 \text{ m / año} \\V_y &= 0,0131 \text{ m / año}\end{aligned}$$

La reducción a la época de referencia corresponde con:

Punto 1:

$$\begin{aligned}X &= 1\ 598\ 475,4542 - (0,0085 \times 8,9) = 1\ 598\ 475,3786 \text{ m} \\Y &= -6\ 151\ 696,5703 - (0,0034 \times 8,9) = -6\ 151\ 696,6006 \text{ m} \\Z &= 562\ 538,8750 - (0,0125 \times 8,9) = 562\ 538,7638 \text{ m}\end{aligned}$$

Punto 2:

$$\begin{aligned}X &= 1\ 591\ 086,7412 - (0,0061 \times 8,9) = 1\ 591\ 086,6869 \text{ m} \\Y &= -6\ 153\ 753,2293 - (0,0027 \times 8,9) = -6\ 153\ 753,2533 \text{ m} \\Z &= 551\ 651,3878 - (0,0131 \times 8,9) = 551\ 651,2712 \text{ m}\end{aligned}$$

Que, en coordenadas curvilíneas corresponden con:

Punto 1:

$$\begin{aligned}\varphi &= 05^\circ 05' 30,12498'' \text{ N} \\ \lambda &= 75^\circ 26' 03,15343'' \text{ W} \\ h &= 2856,356 \text{ m}\end{aligned}$$

Punto 2:

$$\begin{aligned}\varphi &= 04^\circ 59' 36,80132'' \text{ N} \\ \lambda &= 75^\circ 30' 12,00516'' \text{ W} \\ h &= 2035,832 \text{ m}\end{aligned}$$

Estos valores son las coordenadas *MAGNA-SIRGAS* de los dos puntos nuevos.

Aplicación de velocidades en levantamientos GPS diferenciales apoyados en estaciones *MAGNA-SIRGAS* de funcionamiento continuo.

Las estaciones *MAGNA-SIRGAS* de funcionamiento continuo, son aquellas que están registrando información GPS de manera permanente. En la actualidad (agosto de 2004) se encuentran disponibles: Bogotá (BOGA), Cartagena (CART), Cali (CALI), Cúcuta (CUCU), Pereira (PERA) y Valledupar (VALL). Estas pueden ser utilizadas como estación base en el desarrollo de levantamientos GPS diferenciales, garantizando la vinculación directa de los puntos nuevos al sistema oficial *MAGNA-SIRGAS*. El IGAC proporciona la información correspondiente en el formato universal RINEX. Estas estaciones forman parte de la red SIRGAS de funcionamiento continuo y sus coordenadas son calculadas semanalmente por el centro GPS-RNAAC-SIR, por tal razón no es necesario aplicar el modelo de velocidades a la estación base. El procedimiento pertinentes es:

1. Adquisición de la información RINEX en el IGAC
2. Descarga, por parte del usuario, de las coordenadas actuales de las estaciones GPS de funcionamiento continuo en el sitio Internet:



<ftp://cddisa.gsfc.nasa.gov/gps/products>

La información está dispuesta según la semana GPS, por ejemplo para el 10 de febrero de 2004 deberá accederse el directorio *I257*

La combinación de las soluciones regionales para las estaciones GPS de funcionamiento continuo está a cargo del Instituto Tecnológico de Massachussets (MIT), por tal razón debe buscarse el archivo *mitI257p.ssc.z*

Una vez el archivo haya sido descomprimido, mediante un editor de texto deben buscarse las coordenadas geocéntricas [X, Y, Z] de la estación deseada, que para el caso de BOGA, en el presente ejemplo son:

```
....  
334 STAX BOGA A 1 04:046:43185 m 2 0.174451740592138E+07 .646088E-03  
335 STAY BOGA A 1 04:046:43185 m 2 -.611605164464370E+07 .890126E-03  
336 STAZ BOGA A 1 04:046:43185 m 2 0.512580865851186E+06 .578732E-03  
....
```

Deben utilizarse los valores de las coordenadas geocéntricas, las cuales tienen una precisión al milímetro. Debe prestarse especial atención de **NO** utilizar las coordenadas elipsoidales (φ , λ , h), ya que, aunque están contenidas en el archivo, éstos valores son aproximados y sólo se utilizan para la representación gráfica de la posición de las estaciones en mapas globales. Es decir, la coordenadas que deben utilizarse para el procesamiento del levantamiento GPS son

$$\begin{aligned} X &= 1\,744\,517,4059 \text{ m} \\ Y &= -6\,116\,051,6446 \text{ m} \\ Z &= 512\,580,8659 \text{ m} \end{aligned}$$

En el evento de que no se encuentre el archivo *mit????p.ssc.z* para la semana en la que se desarrolló el levantamiento, puede utilizarse la solución de una o dos semanas anteriores o posteriores, sin que ello implique mayor imprecisión en las coordenadas de los puntos nuevos.

3. Se adelanta el procesamiento de la información GPS.
4. Se aplican las velocidades de la estación de funcionamiento continuo a los puntos nuevos para que sus coordenadas sean trasladadas a la época de referencia. Dichas velocidades son entregadas por el IGAC junto con los archivos RINEX de las estaciones solicitadas. No se recomienda la utilización del modelo de velocidades, dado que la información del cambio de coordenadas obtenida de las estaciones de funcionamiento continuo es más precisa.



Ejemplo

A partir de la estación **MAGNA-SIRGAS** de funcionamiento continuo CODAZZI 2010 (BOGA) se determina un punto nuevo el 10 de febrero de 2004.

a. Época de medición:

El día 10 de febrero corresponde con el día número 41 del año, por tanto la época de medición es 2004.1

b. Coordenadas de la estación de referencia:

Las coordenadas **MAGNA-SIRGAS** (época 1995.4) del vértice CODAZZI 2010 (BOGA) son:

$$\begin{array}{ll} \varphi = 04^{\circ} 38' 19,242 08'' \text{ N} & X = 1\ 744\ 517,5375 \text{ m} \\ \lambda = 74^{\circ} 04' 47,815 30'' \text{ W} & Y = -6\ 116\ 052,0161 \text{ m} \\ h = 2\ 610,816 \text{ m} & Z = 512\ 580,7161 \text{ m} \end{array}$$

No obstante, para la época de medición (2004.1), la solución calculada semanalmente para las estaciones de funcionamiento continuo SIRGAS arroja los siguientes valores para BOGA:

$$\begin{array}{ll} \varphi = 04^{\circ} 38' 19,247 97'' \text{ N} & X = 1\ 744\ 517,4059 \text{ m} \\ \lambda = 74^{\circ} 04' 47,816 10'' \text{ W} & Y = -6\ 116\ 051,6446 \text{ m} \\ h = 2\ 610,436 \text{ m} & Z = 512\ 580,8659 \text{ m} \end{array}$$

Si se utiliza el modelo de velocidades SIRGAS para llevar las coordenadas BOGA de 2004.1 a 1995.4 se encontrará una discrepancia de aproximadamente 15 cm en la altura. Esto obedece a que el modelo de velocidades mencionado considera la componente horizontal, de allí es más fiable utilizar las velocidades locales de la estación permanente para reducir a la época de referencia las coordenadas de los puntos nuevos. De hecho, el modelo es mucho más impreciso que la solución semanal de coordenadas y éste debe ser utilizado sólo para aquellos puntos **MAGNA-SIRGAS** que no son de funcionamiento continuo. Se llama especialmente la atención sobre la diferencia en la altura elipsoidal del punto para las dos épocas, si se utilizan las coordenadas 1995.4 para el procesamiento del levantamiento se presentarán discrepancias hasta de 40 cm en las alturas elipsoidales de los puntos nuevos.

c. Procesamiento de la información GPS:

El levantamiento GPS se procesa convencionalmente utilizando como referencia las coordenadas de la solución semanal para el punto CODAZZI 2010 (BOGA), las cuales



son obtenidas del servicio IGS a través del sitio <ftp://cddisa.gsfc.nasa.gov/gps/products>. Los resultados obtenidos para el punto nuevo son:

Punto 1:

$$\begin{array}{ll} \varphi = 04^{\circ} 35' 40,12861'' \text{ N} & X = 1\ 740\ 920,9774 \text{ m} \\ \lambda = 74^{\circ} 06' 53,15081'' \text{ W} & Y = -6\ 117\ 533,1075 \text{ m} \\ h = 2656,356 \text{ m} & Z = 507\ 710,7131 \text{ m} \end{array}$$

d. Traslado de las coordenadas de los puntos nuevos a la época de referencia:

Las velocidades anuales de la estación según el centro de procesamiento IGS-RNAAC-SIR son:

$$\begin{array}{l} V_x = -0,0057 \text{ m / año} \\ V_y = 0,0277 \text{ m / año} \\ V_z = 0,0112 \text{ m / año} \end{array}$$

La reducción a la época de referencia corresponde con:

Punto 1:

$$\begin{array}{l} X = 1\ 740\ 920,9774 - (-0,0057 \times 8,7) = 1\ 740\ 921,0270 \text{ m} \\ Y = -6\ 117\ 533,1075 - (0,0277 \times 8,7) = -6\ 117\ 532,8665 \text{ m} \\ Z = 507\ 710,7131 - (0,0112 \times 8,7) = 507\ 710,6157 \text{ m} \end{array}$$

Estos valores son las coordenadas *MAGNA-SIRGAS* del punto nuevo.

Este documento trata de orientar a los usuarios de la información geodésica del Instituto Geográfico Agustín Codazzi en la utilización de modelos de velocidad de coordenadas en el procesamiento de información GPS, pero en ningún momento busca reemplazar la consulta de libros especializados.

