

Determinación de la superficie vertical de
referencia para Colombia

(Traducción)

Laura Sánchez Rodríguez

Dresde, junio de 2003

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Institut für Planetare Geodäsie
Theoretische und Physikalische Geodäsie

Bestimmung der Höhenreferenzfläche für Kolumbien

Diplomarbeit

Laura Sánchez Rodríguez

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. habil. R. Dietrich, Technische Universität Dresden
Dr.-Ing. W. Bosch, Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, München
Eingereicht: 20. Juni 2003

Este trabajo fue desarrollado por la ingeniera Laura Sánchez Rodríguez, funcionaria del *Instituto Geográfico Agustín Codazzi* (IGAC), para optar al título de *Diplom-Ingenieurin* (Dipl.-Ing.) en la *Technische Universität Dresden* (TUD), con apoyo de una beca proporcionada por el *Deutscher Akademischer Austausch Dienst* (DAAD) y el respaldo logístico y científico del *Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut* (DGFI).

La autora agradece profundamente el soporte de estas cuatro instituciones.

Contenido

1	Introducción	9
2	Estado actual de las alturas en Colombia	11
2.1	Datum vertical	11
2.2	Redes de nivelación	11
2.3	Superficies verticales de referencia	13
3	Determinación gravimétrica del geoide y del cuasigeoide	15
3.1	Teoría de Stokes	16
3.2	Teoría de Molodenski	18
3.3	Evaluaciones numéricas en la práctica	19
4	Datos de gravedad utilizados y su procesamiento	21
4.1	Información gravimétrica terrestre	21
4.1.1	Datos de gravedad de referencia en Colombia	21
4.1.2	Ajuste de la red gravimétrica de primer orden	23
	Red gravimétrica de primer orden de SIGNAR	23
	Ajuste de la RED58 con referencia a SIGNAR	26
4.1.3	Nuevo ajuste de las líneas gravimétricas	28
4.1.4	Datos gravimétricos provenientes de Defense Mapping Agency	32
4.1.5	Datos gravimétricos provenientes de compañías petroleras	33
4.2	Información gravimétrica aérea	39
4.3	Información de altimetría satelital	41
4.4	Modelos globales de gravedad	42
5	Anomalías de gravedad y efectos topográficos	49
5.1	Determinación de mallas homogéneas de información gravimétrica	50
5.1.1	Anomalías (terrestres) de Molodenski	50
5.1.2	Combinación de anomalías gravimétricas terrestres con las provenientes de altimetría satelital	55
5.2	Término G1 de Molodenski	56
6	Cálculo de los modelos geoidal y cuasigeoidal	59
6.1	Técnica Remove/Restore	59
6.2	Determinación del cuasigeoide	60
6.2.1	Etapas de Remove	60
6.2.2	Cálculo de la componente regional del cuasigeoide	61
6.2.3	Etapas de Restore	64
6.3	Modelo cuasigeoidal QgeoCol2004	65
6.4	Modelo geoidal GeoCol2004	67
6.5	Comparación con alturas anómalas provenientes de nivelación geodésica y posicionamiento GPS	67
7	Resumen y actividades futuras	70
	Referencias	73

Anexos

A Datos gravimétricos de referencia en Colombia	79
A.1 Red gravimétrica SIGNAR de primer orden	79
A.2 Red gravimétrica SIGNAR de segundo orden	81
A.3 Red gravimétrica RED58	82
A.4 Factores de escala de los equipos utilizados en la medición de las líneas gravimétricas	83
A.5 Deriva de los equipos utilizados en la medición de las líneas gravimétricas	84
B Depuración de los datos gravimétricos cedidos por ECOPETROL	85
B.1 Proyecto GSL95	85
B.2 Proyecto GMVI97	86
B.3 Proyecto GSA36	87
B.4 Proyecto GNA29	88
B.5 Proyecto GBCA52	89
B.6 Proyecto GLAG94	90
B.7 Proyecto GLLA21	91
B.8 Proyecto GCHA11	92
B.9 Proyecto GPUB67	93
C Comparación de los modelos globales de gravedad EGM96, TEG-4 y EIGEN-2 con las anomalías regionales	95
C.1 Diferencias entre las anomalías medias (2,5°x2,5°) de los modelos globales de gravedad EGM96 y EIGEN-2	95
C.2 Diferencias entre las anomalías medias (2,5°x2,5°) de los modelos globales de gravedad TEG-4 y EGM96	96
C.3 Diferencias entre las anomalías Aire Libre regionales (2,5°x2,5°) y las derivadas del modelo EGM96	97
C.4 Diferencias entre las anomalías aire libre regionales (2,5°x2,5°) y las derivadas del modelo EIGEN-2	98
C.5 Diferencias entre las anomalías de Faye regionales (2,5°x2,5°) y las derivadas del modelo EGM96	99
C.6 Diferencias entre las anomalías de Faye regionales (2,5°x2,5°) y las derivadas del modelo EIGEN-2	100
D Representación gráfica de los parámetros del campo de gravedad	101
D.1 Anomalías Aire Libre derivadas del modelo TEG-4	101
D.2 Anomalías residuales	102
D.3 Componente global del cuasigeoide derivada del modelo TEG-4	103
D.4 Componente regional del modelo cuasigeoidal QgeoCol2004	104
D.5 Modelo geoidal GeoCol2004	105
D.6 Diferencias entre los modelos cuasigeoidales QgeoCol2004 y GeoCol2001	106

Índice de figuras

2.1	Redes de nivelación y mareógrafos en Colombia	12
3.1	Relaciones entre diferentes observables del campo de gravedad terrestre	15
4.1	Red gravimétrica RED58	22
4.2	Red gravimétrica de primer orden de SIGNAR	24
4.3	Frecuencia de los errores medios de los valores de gravedad de la red de primer orden de SIGNAR	25
4.4	Frecuencia de los errores medios de los valores de gravedad de la RED58	28
4.5	Líneas gravimétricas según su clasificación en las subredes ajustadas	30
4.6	Errores medios de las líneas gravimétricas (ajuste GRAVLINIEN2003)	31
4.7	Diferencia entre los valores de gravedad obtenidos en el ajuste de 1995 y GRAVLINIEN2003	33
4.8	Valores de gravedad de DMA en Colombia	34
4.9	Covarianzas empíricas y su representación mediante una función exponencial de covarianza en la interpolación de anomalías de Bouguer	36
4.10	Ejemplo de la evaluación de los datos gravimétricos proporcionados por ECOPETROL: Proyecto GBCN84	37
4.11	Correcciones utilizadas en la depuración de los datos gravimétricos proporcionados por ECOPETROL	38
4.12	Puntos de cruce entre los perfiles aerogravimétricos medidos sobre el área selvática de Colombia	40
4.13	Diferencias entre las anomalías medias ($2,5^{\circ} \times 2,5^{\circ}$) de los modelos globales de gravedad TEG-4 y EIGEN-2	44
4.14	Desviaciones de la vertical de los modelos EIGEN-2 y TEG-4	46
4.15	Diferencias entre las anomalías locales y las derivadas el modelo TEG-4	47
5.1	Funciones de covarianza generadas a partir de la interpolación de anomalías simples de Bouguer y de Molodenski	50
5.2	Datos locales de gravedad disponibles	51
5.3	Comparación de diferentes procedimientos para la obtención de valores de anomalía Bouguer total en una malla de ($2' \times 2'$)	54
5.4	Comparación de las anomalías gravimétricas terrestres con las derivadas de altimetría satelital sobre la línea de costa	55
5.5	Zonas de integración definidas para el cálculo de la corrección por terreno	57
5.6	Corrección por terreno en Colombia	58
6.1	Cálculo de anomalías residuales (etapa de remove)	61
6.2	Modelo cuasigeoidal <i>QgeoCol2004</i>	66
6.3	Diferencias entre las ondulaciones geoidales y las alturas anómalas	68
6.4	Discrepancias [$\varepsilon = h - H^N - \zeta$] sobre una línea de nivelación	69

Índice de tablas

3.1 Condiciones del valor de frontera para las Teorías de Stokes y Molodenski	17
4.1 Errores en las funciones de conversión de los gravímetros Worden	27
4.2 Factores de escala para los gravímetros Worden W32B y W397	27
4.3 Indicadores estadísticos de las subredes en las que se han clasificado las líneas gravimétricas para su nuevo ajuste	31
4.4 Interpolación de anomalías de Bouguer para la evaluación de los datos gravimétricos proporcionados por ECOPEPETROL: Proyecto GBCN84	39
4.5 Parámetros principales de los modelos globales de gravedad EGM96, TEG-4 y EIGEN-2	43
4.6 Diferencias entre las anomalías de los modelos globales de gravedad en Colombia	44
4.7 Diferencias entre las anomalías gravimétricas locales y las obtenidas de los modelos globales de gravedad	45
5.1 Comparación de diferentes procedimientos para la obtención de valores de anomalía Bouguer total en una malla de (2' x 2')	54
6.1 Comparación, en función del radio de integración ψ de las alturas anómalas derivadas de alturas normales y elipsoidales, con las obtenidas a partir de la Fórmula de Stokes [$\varepsilon = h - H^N - \zeta$]	63
6.2 Comparación de los modelos <i>QgeoCol2004</i> y <i>GeoCol2001</i> en los principales mereógrafos de Colombia	65

1 Introducción

El desarrollo de las nuevas tecnologías apoyadas en satélites para la determinación de coordenadas ha revolucionado no solamente los procedimientos de observación en campo, sino también los métodos de procesamiento y las bases teóricas de la Geodesia; en especial, los sistemas de referencia. En general, las órbitas de los satélites son calculadas sobre un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional geocéntrico; de allí, las posiciones de los puntos determinados a partir de posicionamiento satelital, se obtienen en dicho sistema. La vinculación de la componente horizontal (latitud $-\varphi$ -, longitud $-\lambda$ -) de estos puntos nuevos a los datum geodésicos clásicos (no geocéntricos), es efectiva mediante una transformación geométrica; mientras que, su componente vertical (la altura) requiere de la formulación de relaciones físicas que ofrezcan la consistencia necesaria para combinar las alturas niveladas (afectadas por el campo de gravedad terrestre) y las proporcionadas por los nuevos métodos (como el GPS), las cuales son cantidades netamente geométricas (independientes del campo de gravedad).

El sistema de referencia cartesiano tridimensional geocéntrico proporciona alturas geométricas elipsoidales, referidas a un elipsoide global; en contraste, los métodos clásicos de nivelación, combinados con las reducciones por efectos del campo de gravedad terrestre, proporcionan alturas físicas (ortométricas o normales), las cuales se refieren a una superficie equipotencial de dicho campo (geoide) o a una muy cercana (cuasigeoide). La combinación de estas alturas es posible sí se conoce exactamente la relación entre las superficies verticales de referencia correspondientes, es decir, entre el elipsoide y el geoide o entre el elipsoide y el cuasigeoide. Esta relación, denominada altura geoidal o altura anómala, se determina mediante el modelamiento de mediciones del campo de gravedad terrestre (anomalías gravimétricas, deflexiones de la vertical, perturbaciones de órbitas satelitales).

Dentro de este marco, el objetivo principal del presente trabajo es la determinación gravimétrica de un modelo geoidal (cuasigeoidal) como superficie vertical de referencia para Colombia. Éste debe proporcionar la conexión entre el sistema de alturas clásico del país y los nuevos métodos satelitales, de modo que sea útil a la agrimensura nacional y se identifique como un avance en la definición y realización de un sistema vertical de referencia moderno. El contenido de este documento corresponde con:

El capítulo 2 muestra el estado actual de las alturas determinadas en Colombia, el datum vertical oficial, las redes de nivelación y los modelos geoidales hasta ahora calculados en el país. Igualmente, señala que la reducción por efectos del campo de gravedad no ha sido tomada en cuenta en el ajuste de las diferencias de nivel medidas y que, por tanto, la determinación de números o cotas geopotenciales es un requisito indispensable para el alcanzar el objetivo propuesto.

El capítulo 3 presenta una síntesis del problema de valor de frontera en Geodesia, junto con sus soluciones clásica (Teoría de Stokes) y moderna (Teoría de Molodenski), como soporte teórico para la determinación del campo externo de gravedad terrestre y el consecuente cálculo del geoide y del cuasigeoide.

El capítulo 4 analiza en detalle la información gravimétrica disponible, ya que de su calidad depende directamente la precisión del geoide (o del cuasigeoide). Incluye un nuevo ajuste de las redes gravimétricas de Colombia, la depuración completa de los datos gravimétricos proporcionados por la compañía colombiana de petróleo ECOPETROL y el conjunto de anomalías gravimétricas derivadas de altimetría satelital para cubrir las áreas marinas adyacentes. Igualmente, proporciona una descripción de los diferentes modelos globales de

gravedad (EGM96, TEG4, EIGEN2) tenidos en cuenta para definir el nivel vertical absoluto del geoide (o cuasigeoide) local.

El capítulo 5 muestra el cálculo de las anomalías gravimétricas, junto con un resumen de las correcciones de gravedad correspondientes y su interpolación en mallas regulares. Este capítulo hace énfasis en la reducción topográfica y los modelos digitales de terreno utilizados, ya que la topografía colombiana está caracterizada por gradientes verticales muy fuertes que, necesariamente, determinan el comportamiento del campo de gravedad local.

El capítulo 6 se ocupa de la determinación práctica del geoide y del cuasigeoide, así como de su comparación. En él se describe la técnica *remove/restore* como solución para la combinación de datos de gravedad terrestres (regionales) con un modelo geopotencial global, a través de la evaluación matemática de las fórmulas de Stokes y Molodenski (capítulo 2) con la información gravimétrica descrita en el capítulo 4. Igualmente, incluye la comparación de los modelos calculados, con las cantidades equivalentes derivadas de las alturas elipsoidales y las niveladas corregidas por efectos de la gravedad.

Finalmente, el capítulo 7 presenta un resumen de los resultados, incluyendo conclusiones y delineamientos para actividades futuras. Adicionalmente, describe una metodología para utilizar, en la práctica, los modelos calculados (geoide, cuasigeoide), mientras que Colombia adopta oficialmente un tipo de alturas físicas (ortométricas o normales).

2 Estado actual de las alturas en Colombia

2.1 Datum vertical

Los años cuarenta marcan el inicio de las actividades geodésicas determinantes en Colombia. En esa época se establecen 35 estaciones de Laplace como base para la realización del sistema de referencia horizontal local, 13 estaciones absolutas (pendulares) de gravedad como punto de partida para el desarrollo de mediciones gravimétricas y 4 mareógrafos para la observación y predicción del nivel del mar con propósitos de navegación y definición de un datum vertical de referencia para la agrimensura en el país. Dichos mareógrafos fueron instalados, por el US Coast and Geodetic Service (USCGS), dos en el mar Caribe (Cartagena [10,1° N, 75,0° W], Riohacha [11,0° N, 72,5° W]) y dos en el Océano Pacífico (Buenaventura [3,8° N, 77,0° W], Tumaco [2,8° N, 77,5° W]) (figura 2.1). El nivel medio del mar calculado a partir de los registros de estos cuatro mareógrafos fue tomado como nivel de referencia para las líneas de nivelación medidas entre 1950 y 1957. Los períodos de observación corresponden con (IGAC 1960):

Buenaventura: 01/1942 ... 12/1951, 01 ... 12/1955 y 01/1957 ... 08/1959
Cartagena: 01/1949 ... 08/1959
Riohacha: 01/1953 ... 12/1956 y 01 ... 12/1959
Tumaco: 01/1953 ... 12/1959

Tiempo después se observó que el nivel registrado en el Océano Pacífico era, aproximadamente, 28 cm más alto que el del Caribe y por tanto, se decidió tomar como superficie de referencia para las alturas niveladas el nivel medio del mar calculado a partir de las observaciones registradas en el mareógrafo de Buenaventura (García y Cuervo 1978).

Al promediar los registros mareográficos se eliminaron, con muy buena aproximación, los cambios temporales periódicos de la superficie del mar (mareas y variaciones meteorológicas, oceanográficas y de densidad del agua), pero los no periódicos, los seculares y los generados por la topografía local de la superficie del mar (SSTop: Sea Surface Topography) fueron ignorados. Bosch et al. (2001) muestra que la SSTop, referida al modelo global EGM96 (Earth Geopotential Model 1996, Lemione et al. 1998), alcanza +61cm en Buenaventura, mientras que, con respecto a un modelo geoidal local, ésta es de -42 cm (Sánchez and Drewes 2001), lo que indica que la realización (materialización) de la superficie vertical de referencia a través del nivel medio del mar seleccionado presenta inconsistencias fácilmente en el rango de un metro.

2.2 Redes de nivelación

Las redes de nivelación en Colombia han sido establecidas por el Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC) a lo largo de las carreteras nacionales y siguiendo los estándares técnicos del Servicio Geodésico Inter Americano (IAGS: Interamerican Geodetic Service). Para el efecto, se definieron tres niveles de precisión:

Red de nivelación de primer orden: Contiene los circuitos básicos de nivelación, cuyo diámetro promedio es de ~100 km. Éstos han sido medidos con métodos geodésicos de alta precisión (nivelación geométrica o spirit levelling) y sus puntos se han materializado con monumentos de concreto o incrustaciones de bronce en lugares geológicamente estables. La distancia entre puntos consecutivos varía de 1,2 km en áreas montañosas hasta 2,5 km en zonas planas. La diferencia entre las mediciones en el sentido de avance de la nivelación y de regreso, para un mismo circuito, deben tener un error medio menor que $\pm 4\text{mm}\sqrt{s}$ [km].

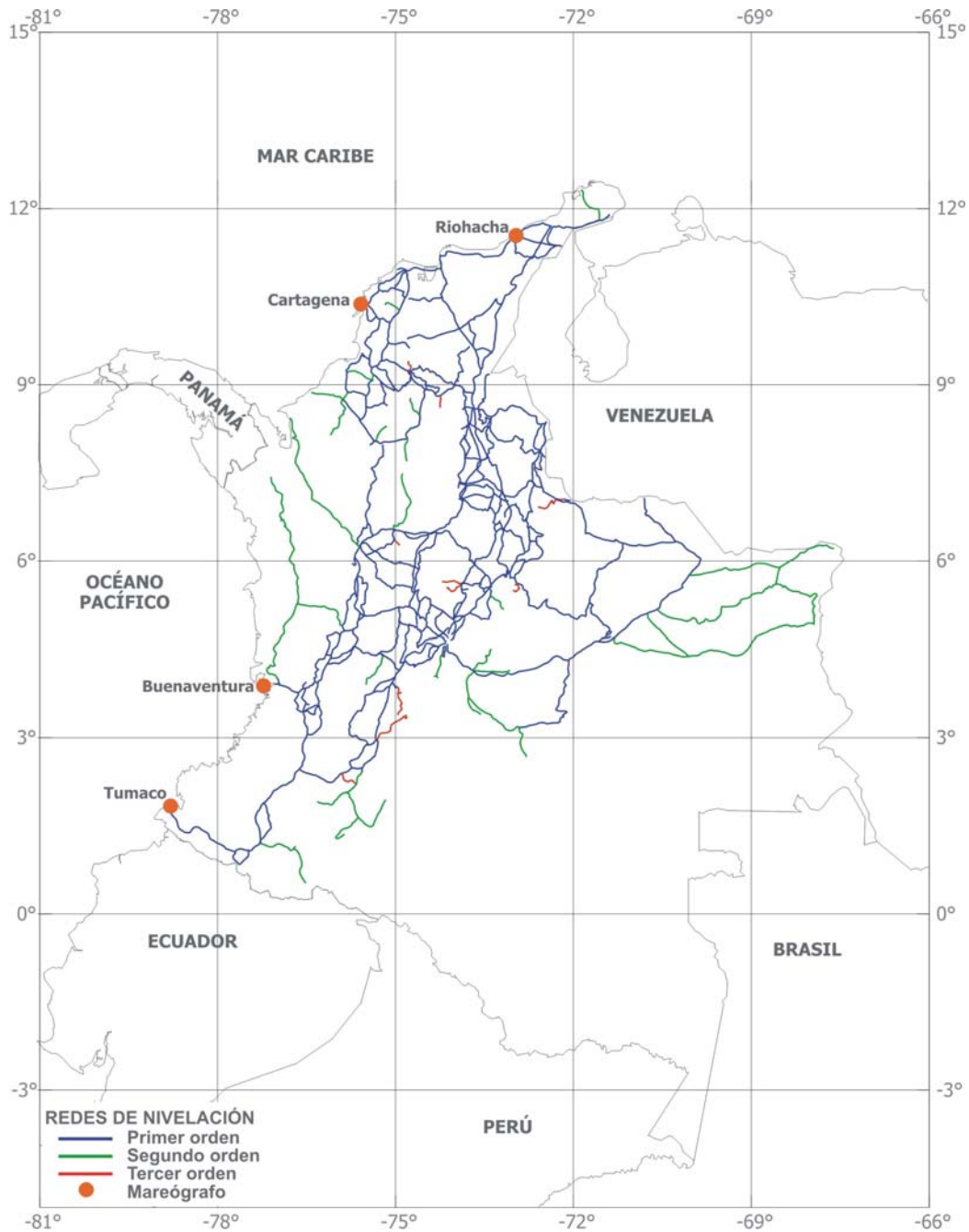


Figura 2.1 Redes de nivelación y mareógrafos en Colombia

Líneas de nivelación de segundo orden: éstas deben densificar los circuitos de primer orden, de modo que se cuente, en las ciudades medianas y pequeñas, con puntos de nivelación que sirvan de apoyo para la agrimensura. Las diferencias entre las mediciones de ida y vuelta deben estar al rededor de $\pm 8\text{mm}\sqrt{s}$ [km]. A esta clase también pertenecen aquellos circuitos que han sido nivelados con métodos de alta precisión (nivelación geométrica), pero en un sólo sentido (sin regreso).

Líneas de nivelación de tercer orden: éstas densifican las redes de primer y segundo orden para aplicaciones de precisiones menores. Sus errores de cierre no deben ser mayores que $\pm 12\text{mm}\sqrt{s}$ [km].

Actualmente, la totalidad de las líneas de nivelación contiene más de 20 000 puntos a lo largo de 26 000 km (figura 2.1). Dado que la precisión de las alturas niveladas satisfizo las especificaciones de la cartografía, el efecto del campo de gravedad terrestre fue omitido; lo que significa que las alturas actuales (oficiales) son cantidades puramente geométricas, sin reducciones gravimétricas, que en circuitos de nivelación han sido ajustadas como redes verticales. Dichas alturas fueron procesadas, inicialmente, línea por línea por el IAGS, posteriormente, en 1985, se adelantó un ajuste en bloque de las observaciones existentes hasta esa fecha. Las mediciones subsiguientes han sido ajustadas línea por línea y adicionadas al banco de datos correspondiente. El ajuste de 1985 muestra que las correcciones por kilómetro están entre 3 mm y 15 mm, cantidades explicables, dado que la influencia del campo de gravedad, al ser omitida, se asumió como un error de observación. En este sentido, no es posible transformar directamente las alturas actuales en cantidades físicas; por el contrario, es necesario procesar las diferencias de nivel medidas (originales) en combinación con valores de gravedad.

La densificación y extensión de las líneas de nivelación no han seguido algún orden específico y los puntos de inicio y cierre no corresponden con nodos definidos estrictamente, sino con estaciones contenidas en circuitos ya nivelados; de allí, un ajuste global exige el examen cuidadoso y detallado de las carteras de campo. Igualmente, la secuencia de observación de las líneas de nivelación no ha sido ni regular, ni sistemática, lo que genera que algunos circuitos de nivelación contengan desniveles medidos con diferencias de tiempo hasta de 40 años. De hecho, algunos de los circuitos nivelados en más de una oportunidad muestran diferencias de varios centímetros en desniveles comunes, lo que podría entenderse como una consecuencia de los errores de medición o de movimientos verticales de la corteza; infortunadamente, la clasificación pertinente aún no es posible.

Problemas adicionales a los descritos, como por ejemplo, la fuerte topografía colombiana (variaciones de altura de 0 m a 5000 m en sólo 200 km de distancia horizontal) o la extensa zona selvática del país, impiden una distribución homogénea del control vertical y hacen que los costos de la nivelación clásica sean bastante altos. Dentro de este marco, la necesidad de derivar alturas utilizando posicionamiento satelital es el problema inmediato por resolver. Las alturas geométricas derivadas de las técnicas modernas deben ser combinadas consistentemente con modelos geoidales (cuasigeoidales) de alta resolución, para que 1) el orden de precisión de las primeras se mantenga al obtener alturas físicas y 2) que éstas sean equiparables con las obtenidas a partir de los métodos de nivelación de alta precisión.

2.3 Superficies verticales de referencia

La determinación de modelos geoidales locales en Colombia comienza en 1962, cuando con las estaciones de Laplace mencionadas, más algunos puntos astronómicos complementarios, se calcularon deflexiones de la vertical para modelar un geoide astrogeodésico. Dichas deflexiones fueron comparadas y complementadas con aquellas derivadas de observaciones gravimétricas y, con la ayuda de un mapa de anomalías isostáticas, se adelantó la interpolación de las mismas para casi todo el territorio colombiano. La precisión de los contornos de deflexión alcanzó $\pm 2''$ en las zonas montañosas y $\pm 6''$ en las planas. Dado que los cálculos se adelantaron sobre el datum local (Datum BOGOTÁ, elipsoide de Hayford), las ondulaciones geoidales obtenidas son relativas; sus valores están entre +25 m al norte del país y -60m al oeste. Infortunadamente, estos avances nacionales en la Geodesia Física fueron asumidos como curiosidad científica y la determinación del geoide fue dejada de lado por mucho tiempo en la Geodesia colombiana.

El siguiente modelo geoidal conocido en el país fue calculado por DMA (Defense Mapping Agency, actualmente NGA -National Geospatial-Intelligence Agency-) en 1988. Éste se refiere

al WGS84 (World Geodetic System 1984), pero las alturas geoidales se modificaron, de modo tal que fuesen compatibles con el Datum BOGOTÁ (DMA 1988). Los valores de este modelo oscilan entre -20 m y $+24$ m en la zona Andina, mientras que en los Llanos Orientales y en la selva amazónica alcanzan -90 m. Estas cantidades son algo exageradas para la región, por lo que su utilidad práctica no fue efectiva.

La determinación del geoide en Colombia toma un nuevo aliciente al introducirse al país el posicionamiento satelital. Desde 1993 el IGAC ha calculado varios modelos, cuyas diferencias se centran, básicamente, en los datos gravimétricos y topográficos utilizados para la obtención de la componente geoidal local. El primer modelo utilizó anomalías isostáticas derivadas de anomalías Bouguer para hacer la evaluación numérica de la formulación de Stokes. Las ondulaciones geoidales obtenidas sobre el elipsoide WGS84 varían entre -15 m y $+15$ m (Martínez et al. 1992). No obstante, ya que las anomalías isostáticas utilizadas se derivaron empíricamente (sin la utilización de una hipótesis rigurosa de compensación) y el efecto gravimétrico de la topografía (que en Colombia puede alcanzar fácilmente $1000 \mu\text{ms}^{-2}$) fue omitido, dicho modelo contiene errores de longitud de onda larga hasta de 10 m (Sánchez et al. 1995).

Un modelo posterior fue calculado con aproximadamente $90\,000$ valores de gravedad observada y anomalías gravimétricas, cedidos por diferentes bancos mundiales de información (BGI, NOAA, University of Texas, DMA). Dichos datos cubren casi el 60% del territorio colombiano más una franja de $\sim 5^\circ$ sobre los países vecinos. En las áreas marinas se integró la información gravimétrica registrada por embarcaciones geofísicas. Los valores medios $10' \times 10'$ de anomalías Aire Libre se calcularon sobre el elipsoide GRS80 (Moritz 1980a), pero no fue posible hacer una evaluación minuciosa de la calidad de la información incluida (Sánchez et al. 1998). La componente local del geoide se estimó a través de la fórmula de Stokes mediante una integración numérica de tres zonas definidas en torno a cada punto de cálculo: la zona interna (hasta una distancia de $10'$) fue evaluada con un polinomio de grado 6, la zona media (hasta 1°) con valores medios de anomalía de $10' \times 10'$ y la zona externa (hasta $2,5^\circ$) con valores medios de anomalía de $30' \times 30'$. La componente global se estimó a partir del modelo EGM96 (Lemoine et al. 1998). Los resultados muestran alturas geoidales entre -22 m y $+24$ m, con una precisión relativa en torno a ± 80 cm, pero con errores de longitud de onda larga de ~ 3 m (Sánchez et al. 1999).

Amén que el conjunto de datos gravimétricos no pudo ser mejorado, en el año 2000 se calculó un nuevo modelo, pero utilizando la teoría de Molodenski. En primera instancia la interpolación de las anomalías gravimétricas se hizo con valores de anomalía Bouguer total, es decir que se tuvo en cuenta la corrección topográfica, la cual fue calculada con apoyo en el modelo ETOPO5 (NOAA 1988). Posteriormente, se evaluó numéricamente la integral de Stokes utilizando, en las áreas continentales, anomalías de Faye (Anomalía Aire Libre + Corrección Topográfica, donde esta última hace las veces de aproximación al término G_1 de Molodenski) y en las zonas marinas, anomalías Aire Libre derivadas de altimetría satelital (Sandwell and Smith 1997). La componente local fue calculada mediante análisis espectral (FFT) con el software GRAVSOFT (Tscherning et al. 1992). Los resultados muestran alturas anómalas desde -30 m hasta $+30$ m, cuya precisión relativa varía entre $\pm 0,18$ m y $\pm 0,38$ m (Martínez and Sánchez 2001).

Este cuasigeoide fue recalculado en 2001 (utilizando un modelo digital de terreno mejorado) y expandido a los países vecinos, con el propósito de evaluar la consistencia de los sistemas clásicos de alturas (Sánchez 2001). Si bien, se obtuvieron resultados satisfactorios en las zonas costeras, permanecen aún errores sistemáticos que pueden provenir de la deficiente calidad de algunos de los datos gravimétricos utilizados. Como consecuencia, un nuevo cálculo del geoide o cuasigeoide en Colombia demanda una depuración exhaustiva de los datos gravimétricos disponibles: objetivo que busca satisfacerse con el presente trabajo.

3 Determinación gravimétrica del geode y del cuasigeoide

La tarea fundamental de la Geodesia es la determinación de la superficie terrestre y de su campo de gravedad externo, mediante el análisis de mediciones realizadas sobre la Tierra o en su entorno inmediato. Este enunciado conduce a la formulación del problema de valor límite (o de frontera), el cual puede entenderse, en general, como la determinación de una función armónica (potencial anómalo, $\nabla T = 0$) en el exterior de una superficie de frontera S , a partir de ciertos valores (deflexiones de la vertical, diferencias de potencial, anomalías gravimétricas) que dicha función asume en S (entre otros, Heiskanen and Moritz 1967, Torge 2001):

$$-2\pi T + \iint_S \left[T \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{l} \frac{\partial T}{\partial n} \right] dS = 0 \quad (3.1)$$

l es la distancia entre el punto de cálculo y la cantidad gravimétrica cuya influencia sobre dicho punto está siendo considerada. T representa la diferencia entre el potencial externo real de la Tierra W (por determinar) y el potencial normal U (conocido) el cual corresponde con el generado por un elipsoide de nivel. U se aproxima tan bien a W , que su diferencia $T = W - U$ puede ser calculada linealmente a partir del gradiente de U (gravedad teórica γ), permitiéndose la omisión de los términos de segundo orden.

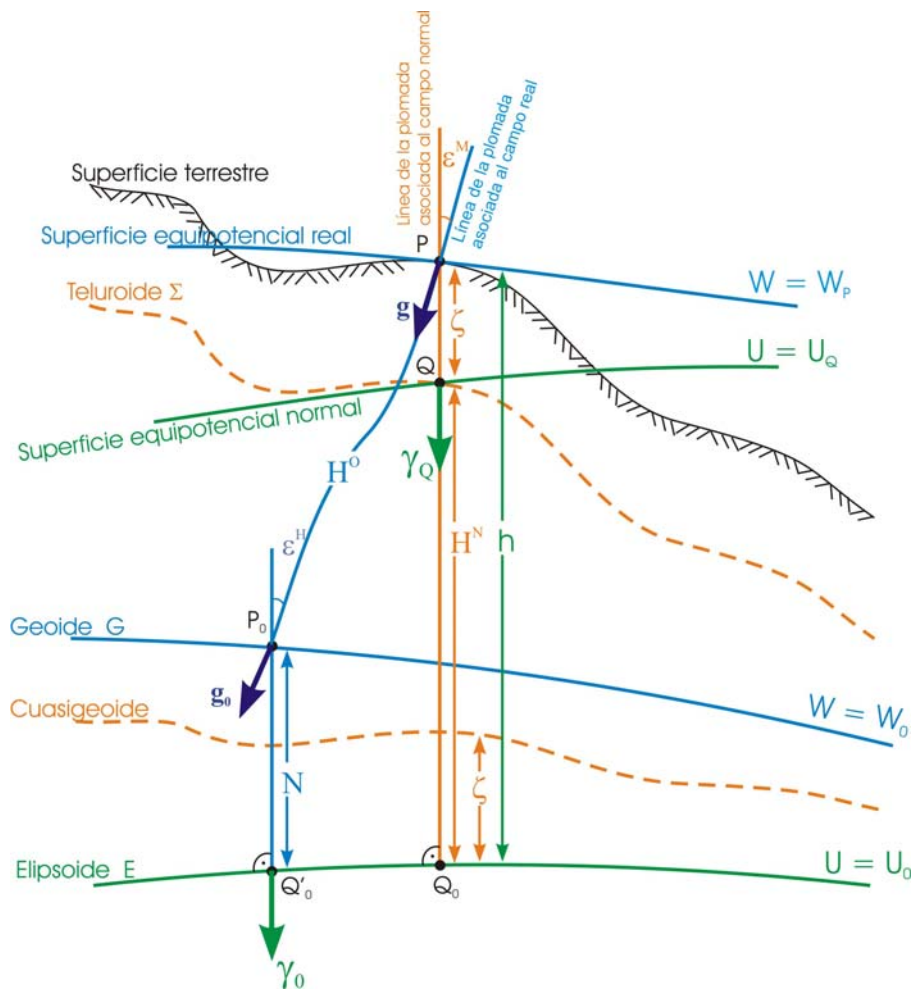


Figura 3.1 Relaciones entre diferentes observables del campo

de gravedad terrestre (*tomado de Kuhn 2000*)

La linealización de (3.1) requiere de una superficie (valor) inicial que sirva de aproximación a la superficie de frontera S . Si S corresponde con el geoide, su aproximación está dada por la superficie del elipsoide de referencia (Teoría de Stokes). Si S es la superficie física de la Tierra (límite entre las masas sólidas u oceánicas con las gaseosas), la aproximación es el teluroide Σ (Teoría de Molodenski) (figura 3.1).

El teluroide Σ es una superficie conformada por aquellos puntos Q , cuyo valor de potencial normal U_Q es idéntico al potencial de gravedad verdadero W_P de los puntos P correspondientes, ubicados sobre la superficie terrestre (figura 3.1). La conexión entre P y Q se define a través de la línea perpendicular (normal) al elipsoide que pasa por P ; la distancia entre ellos se conoce como altura anómala ζ . La altura normal H^N corresponde con la separación entre el teluroide y el elipsoide (distancia entre Q y Q_0). Si de la superficie terrestre se descuenta la altura normal H^N a lo largo de la perpendicular al elipsoide, se obtiene el cuasigeoide. Dado que el potencial W_P varía de punto a punto sobre la superficie de la Tierra, el teluroide Σ y, en consecuencia el cuasigeoide, no son superficies equipotenciales y por tanto, no tienen un significado físico directo.

El geoide está definido por aquella superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre, cuyo potencial real equivale a $W = W_0$ (figura 3.1). La ondulación o altura geoidal N es la distancia entre P_0 (sobre el geoide) y Q'_0 (sobre el elipsoide), medida sobre la normal al elipsoide que pasa por P_0 . La separación, a lo largo de la línea de la plomada, entre P_0 (sobre el geoide) y P (sobre la superficie terrestre) es la altura ortométrica H^O .

La tabla 3.1 muestra la aproximación esférica de las condiciones (en función de las observaciones gravimétricas) que deben satisfacer los valores de frontera, tanto en la Teoría de Stokes, como en la de Molodenski (entre otros, Heiskanen and Moritz 1967, Kuhn 2000, Torge 2001).

3.1 Teoría de Stokes

Según la Teoría de Stokes, la relación (3.1) puede escribirse como:

$$T - \frac{1}{2\pi} \iint_E \left[\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{l} \right] T dE = \frac{1}{2\pi} \iint_E \frac{\Delta g_0}{l} dE \quad (3.5)$$

donde se incluyen las siguientes aproximaciones:

$$dS = dE; \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial h}; \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial h} = -\Delta g + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \quad (3.6)$$

La solución de (3.5), en aproximación esférica, está dada por la Integral de Stokes:

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g_0 S(\psi) d\sigma; \quad N = \frac{T_0}{\gamma} \quad (3.7)$$

Dicha integración es evaluada sobre una esfera unitaria σ , cuyo elemento de superficie está dado por $d\sigma = \cos \varphi d\lambda d\varphi$. $S(\psi)$ es la Función de Stokes:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (3.8)$$

con $\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda' - \lambda)$.

Dado que las mediciones de g se realizan sobre la superficie terrestre y no sobre el geoide (g_0) como lo requiere la teoría, se necesita de la *regularización* de la Tierra y de la correspondiente *reducción* de la gravedad. El primer aspecto se fundamenta en la corrección de la gravedad medida g , de modo que ésta y su potencial asociado sean funciones regulares no sólo fuera de la superficie terrestre, sino también fuera del geoide. Para el efecto, se descuenta de g la influencia gravitacional de las masas externas al geoide y, posteriormente, dicho valor es reducido al geoide equivalente de una Tierra *regularizada* (geoide *regularizado* o cogeoides, figura 3.1).

Tabla 3.1 Condiciones del valor de frontera para las Teorías de Stokes y Molodenski

Teoría de Stokes	Teoría de Molodenski
La superficie de frontera es el geoide y fuera de éste no existen masas	La superficie de frontera es la superficie física de la Tierra (límite entre las masas sólidas u oceánicas con las gaseosas)
Ondulación geoidal (Teorema de Bruns) : $N = \frac{1}{\gamma_0} T_{Q_0} \quad (3.2a)$	Altura anómala o cuasigeoidal (Teorema de Bruns): $\zeta = \frac{1}{\gamma_Q} T_Q \quad (3.2b)$
Componentes de la deflexión de la vertical según Helmert : ξ^H (norte-sur) : $\xi^H = \Phi_{P_0} - B_{Q_0} = - \frac{1}{r\gamma} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big _{Q_0}$ η^H (este-oeste) : $\eta^H = (L_{P_0} - \lambda_{Q_0}) \cos B_{Q_0} = - \frac{1}{r\gamma \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \Big _{Q_0} \quad (3.3a)$ (Φ, Λ) = coordenadas astronómicas, (B, L) = coordenadas geodésicas, (ϕ, λ) = coordenadas esféricas	Componentes de la deflexión de la vertical según Molodenski : ξ^M (norte-sur) : $\xi^M = \Phi_P - B_Q = - \frac{1}{r\gamma} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big _Q$ η^M (este-oeste) : $\eta^M = (\Lambda_P - L_Q) \cos B_Q = - \frac{1}{r\gamma \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \Big _Q \quad (3.3b)$ (Φ, Λ) = coordenadas astronómicas, (B, L) = coordenadas geodésicas, (ϕ, λ) = coordenadas esféricas
Anomalías de la gravedad definidas sobre el geoide: $\Delta g_0 = g_0 - \gamma_0 = - \frac{\partial T}{\partial r} \Big _{Q_0} - \frac{2}{r} T_{Q_0} \quad (3.4a)$ g_0 = Gravedad sobre el geoide	Anomalías de la gravedad definidas sobre la superficie terrestre: $\Delta g = g - \gamma_Q = - \frac{\partial T}{\partial r} \Big _Q - \frac{2}{r} T_Q \quad (3.4b)$ g = gravedad sobre la superficie terrestre

El proceso de reducción incluye la magnitud y la dirección del vector de gravedad. Para el efecto, se requiere del conocimiento exacto de la densidad ρ de las masas existentes entre la superficie terrestre y el geoide, pero, dado que esto no es posible, siempre es necesaria la formulación de hipótesis que describan la distribución de masas correspondiente. Cada hipótesis genera valores diferentes para las condiciones de frontera (3.2a), (3.3a) y (3.4a) y por tanto, geoides diferentes.

La separación entre el geoide y el cogeoide se denomina efecto indirecto δN , éste representa la deformación del geoide generada por el cambio del potencial terrestre verdadero W al descontar el efecto de las masas topográficas en la regularización y reducción de la gravedad observada.

3.2 Teoría de Molodenski

Según la Teoría de Molodenski, la ecuación (3.1) es linealizada utilizando el teluroide. La derivada del potencial anómalo en la dirección normal a dicha superficie ($\partial T/\partial n$), se obtiene a través de su derivada direccional a lo largo de la línea perpendicular al elipsoide, incluyendo la deflexión de la vertical según Molodenski y la inclinación de la topografía (o terreno). Ésta corresponde con (Kuhn 2000):

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \left[-\Delta g + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} T + \gamma (\xi \tan \beta_1 + \eta \tan \beta_2) \right] \cos \beta \quad (3.9)$$

siendo $\tan \beta_1 = \frac{\partial h}{\partial x}$, $\tan \beta_2 = \frac{\partial h}{\partial y}$, $\tan^2 \beta = \tan^2 \beta_1 + \tan^2 \beta_2$

β_1 es la componente de la inclinación de la topografía en la dirección norte-sur (eje x de un sistema de coordenadas local -topocéntrico-), β_2 es la componente de la inclinación de la topografía en dirección este-oeste (eje y de un sistema de coordenadas local) y β es la inclinación máxima. El eje z del sistema topocéntrico coincide con la dirección de la normal elipsoidal local. En consecuencia, (3.1) puede escribirse como:

$$T - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{\cos \beta}{l} \right] T d\Sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{1}{l} \left[\Delta g - \gamma (\xi^M \tan \beta_1 + \eta^M \tan \beta_2) \right] \cos \beta d\Sigma \quad (3.10)$$

La solución a esta ecuación en aproximación esférica es (entre otros, Magnizki et al. 1964):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\Sigma} (G_0 + G_1 + \dots) S(\psi) d\sigma \quad (3.11)$$

Los primeros términos de la serie son:

$$G_0 = \Delta g \quad (3.12)$$

$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_p}{l_0^3} \left(\Delta g + \frac{3G}{2R} \zeta_0 \right) d\sigma \approx \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_p}{l_0^3} \Delta g d\sigma \quad (3.13)$$

donde $l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2}$.

G es la constante gravitacional $6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Asumiendo que la anomalía de gravedad depende linealmente de la altura, G_1 (3.13) puede reemplazarse con la reducción por terreno (o corrección topográfica) calculada para una densidad constante, es decir (Magnizki et al. 1964, Heiskanen and Moritz 1967):

$$G_1 = \frac{1}{2} G \rho R^2 \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)}{l_0^3} d\sigma \quad (3.14)$$

Mediante el Teorema de Bruns (3.2) se obtiene la altura anómala a partir de (3.11), (3.12) y (3.14):

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} G_1 S(\psi) d\sigma \quad (3.15)$$

La Teoría de Molodenski conduce a una solución directa del problema de valor de frontera sobre la superficie terrestre, sin necesidad de formular hipótesis sobre la distribución interna de masas. De hecho, la comparación entre (3.7) y (3.15) muestra que la teoría clásica de Stokes es una solución aproximada del problema de Molodenski.

3.3 Evaluaciones numéricas en la práctica

El geoide y el cuasigeoide son idénticos en las zonas oceánicas ($H^O = H^N = 0$). Allí, son realizados (materializados) mediante la superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre que coincide con la superficie no perturbada del mar (estado de equilibrio que alcanzan las aguas marinas al estar bajo la influencia exclusiva de la fuerza de gravedad terrestre). En las áreas continentales (tierra sólida), el geoide y el cuasigeoide se diferencian en (Heiskanen and Moritz 1967):

$$N - \zeta = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H^O = H^N - H^O \quad (3.16)$$

\bar{g} es el valor medio de la gravedad real, a lo largo de la línea de la plomada, entre el geoide y el punto de cálculo ubicado sobre la superficie terrestre. $\bar{\gamma}$ es el valor medio de la gravedad teórica, a lo largo de la línea de la plomada del campo de gravedad normal, entre el elipsoide y el teluroide, o entre el cuasigeoide y el punto de cálculo ubicado sobre la superficie terrestre. El término $\bar{g} - \bar{\gamma}$ corresponde, en muy buena aproximación, a la anomalía de Bouguer. A través de (3.16) puede derivarse el geoide del cuasigeoide o viceversa (Rapp 1997a); por tanto, en las precisiones siguientes no se hará distinción entre estos dos términos.

A continuación se enuncian diversas metodologías desarrolladas para la determinación del geoide, cuyos resultados numéricos, deben conducir a una única solución del problema del valor de frontera en la Geodesia:

- Los métodos astrogeodésicos (nivelación astronómica, Teorema de Villarceau, etc. ver Torge 1975), los cuales se basan en el análisis geométrico de la dirección del vector de la fuerza de gravedad en puntos discretos, permiten la determinación de ondulaciones geoidales relativas (diferencias) con respecto a un punto origen; su orientación absoluta depende del conocimiento exacto del datum geodésico local de referencia.
- Los métodos gravimétricos, los cuales analizan la magnitud del vector de la fuerza de gravedad a través de la teoría del potencial (secciones [3.1] y [3.2]), conducen a ondulaciones geoidales absolutas (referidas a un elipsoide geocéntrico). Su mayor

exigencia está en la disponibilidad de valores de gravedad sobre toda la superficie terrestre.

- Los métodos geométricos, los cuales se fundamentan en la determinación de alturas elipsoidales h por métodos satelitales y alturas físicas H derivadas de la nivelación geométrica, permiten conocer la ondulación geoidal a través de la relación $N = h - H$.
- Los métodos dinámicos (u orbitales), que analizan las desviaciones de las órbitas reales de los satélites artificiales con respecto a las ideales (órbitas no perturbadas), toman dichos satélites como sensores del campo de gravedad terrestre y representan el potencial de atracción gravitacional V mediante funciones armónicas esféricas, cuyos coeficientes alcanzan un máximo grado n , siendo $[360^\circ/n]$ la longitud de onda más corta posible. El geoide se deriva de la comparación de V con el potencial del campo de gravedad normal U generado por el elipsoide de referencia.
- La altimetría satelital, que se basa en la medición radar de la altura a del satélite sobre la superficie del mar, permite determinar la desviación H^* del nivel medio del mar con respecto al geoide. Dicha desviación se denomina topografía de la superficie del mar (SSTop: Sea Surface Topography). Mediante la introducción de un elipsoide de referencia, pueden derivarse a través de $N = h_{Sat} - a - H^*$ las ondulaciones geoidales en las áreas oceánicas.
- La medición de satélite a satélite (*satellite to satellite tracking*) y la gradiometría satelital (*satellite gravity gradiometry*), los cuales son posibles gracias a las nuevas misiones gravimétricas satelitales. En el primer caso, se observa el campo de gravedad externo de la Tierra mediante la medición permanente, con muy alta precisión, de las variaciones de la distancia entre dos satélites. Las misiones correspondientes son CHAMP (*Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical Research and Application*) y GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) (Reigber et al. 2000). En el segundo caso, se mide directamente la segunda derivada del potencial de gravedad (gradiente de gravedad), misión GOCE (*Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer*) (Müller 2001).

Cada uno de los métodos mencionados genera series de datos independientes, que representan una componente espectral determinada del campo de gravedad terrestre. Por ejemplo, para los modelos globales de gravedad expandidos en series armónicas esféricas, el análisis de órbitas satelitales provee las componentes de onda larga ($n \leq 36$); mientras que los métodos gravimétricos, geométricos y astrogeodésicos proporcionan resoluciones más altas ($n \leq 180 \dots 360$). A nivel regional y local, dichos modelos deben ser lo suficientemente densificados, de modo tal que, las longitudes de onda medias y cortas ($n \geq 180$) provenientes de la topografía y de las densidades de masa locales sean incluidas; por tanto, la solución ideal es la combinación de modelos globales de gravedad con datos (terrestres, marinos y aéreos) locales. En todos los casos, el análisis aislado de las diferentes estrategias mencionadas conducen a modelos geoidales no muy precisos, siempre se requiere de la combinación adecuada de las mismas.

4 Datos de gravedad utilizados y su procesamiento

4.1 Información gravimétrica terrestre

4.1.1 Datos de gravedad de referencia en Colombia

Las mediciones gravimétricas para la determinación de un sistema de referencia en Colombia comenzaron en 1942 al ser establecidas, por parte del IAGS, 13 estaciones pendulares de gravedad ($\pm 10 \dots 50 \mu\text{ms}^{-2}$) como base para la exploración de hidrocarburos. Dichas estaciones fueron referidas al sistema de gravedad de Potsdam y sirvieron de fundamento para establecer, en 1958, una red de referencia (RED58) con 53 puntos (figura 4.1), cuya medición relativa se adelantó con gravímetros Worden ($\pm 1 \mu\text{ms}^{-2}$). Dichos puntos, a su vez, se tomaron como referencia para la medición de las líneas gravimétricas sobre los circuitos de nivelación.

Entre 1970 y 1971, bajo el proyecto IGSN71 (International Gravity Standardization Network 1971) y su densificación en América Latina (RELANG77: Red Latinoamericana de Normalización de la Gravedad 1977), se estableció una estación absoluta de gravedad en Bogotá mediante el método de caída libre (Hammond and Faller 1971), junto con más de 70 estaciones relativas medidas con gravímetros LaCoste & Romberg ($\pm 0,1 \mu\text{ms}^{-2}$) sobre las áreas pobladas del país (Morelli et al. 1974, McConnel et al. 1979). De estas 70 estaciones, 30 coinciden con puntos de la RED58 (figura 4.1). A pesar de que la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG: International Union of Geodesy and Geophysicis) recomendó, durante su asamblea general de 1971 en Moscú, la adopción de IGSN71 como sistema de referencia (ver, p. ej. Torge 1989), las mediciones gravimétricas en Colombia continuaron vinculadas a la RED58.

En 1993, con el propósito de calcular un modelo geoidal [sección 2.3], se hace una evaluación de la información gravimétrica existente, cuyos resultados conducen a la definición y realización de un nuevo sistema gravimétrico nacional de referencia y a la actualización (reajuste) de las líneas gravimétricas. Esta actualización se da mediante el ajuste, línea por línea, de las mediciones de gravedad registradas sobre los circuitos de nivelación y tomando como puntos de referencia las 30 estaciones comunes entre la RED58 e IGSN71 (o RELANG77) (Sánchez 1996). Si bien el nuevo cálculo elimina el error sistemático del sistema Potsdam ($\sim 150 \mu\text{ms}^{-2}$, ver p. ej. Torge 1989), los valores de gravedad obtenidos contienen inconsistencias hasta de $\pm 40 \mu\text{ms}^{-2}$ [Sección 4.1.3], cuyas principales causas son:

- Los valores de gravedad IGSN71 de las estaciones comunes con la RED58 fueron simplemente reemplazados y, la gravedad de aquellas estaciones que no fueron observadas durante las campañas de IGSN71 o RELANG77, se obtuvo a partir de la suma simple de las diferencias medidas en las líneas gravimétricas, sin hacer un ajuste estricto de la RED58. De esta manera, los errores de las mediciones pendulares se mantuvieron.
- En el reajuste de las líneas gravimétricas, los factores de escala de los gravímetros utilizados se asumieron igual a uno. En este punto vale la pena anotar que, entre 1968 y 1980 se utilizaron equipos Worden, posteriormente solo LaCoste & Romberg. La distribución de las observaciones corresponde con un 75% para Worden y un 25% para LaCoste & Romberg.

- Las variaciones temporales de la gravedad que pudiesen haberse presentado durante los diez años de diferencia entre las campañas de medición de IGSN71 y de la RED58 no fueron consideradas.

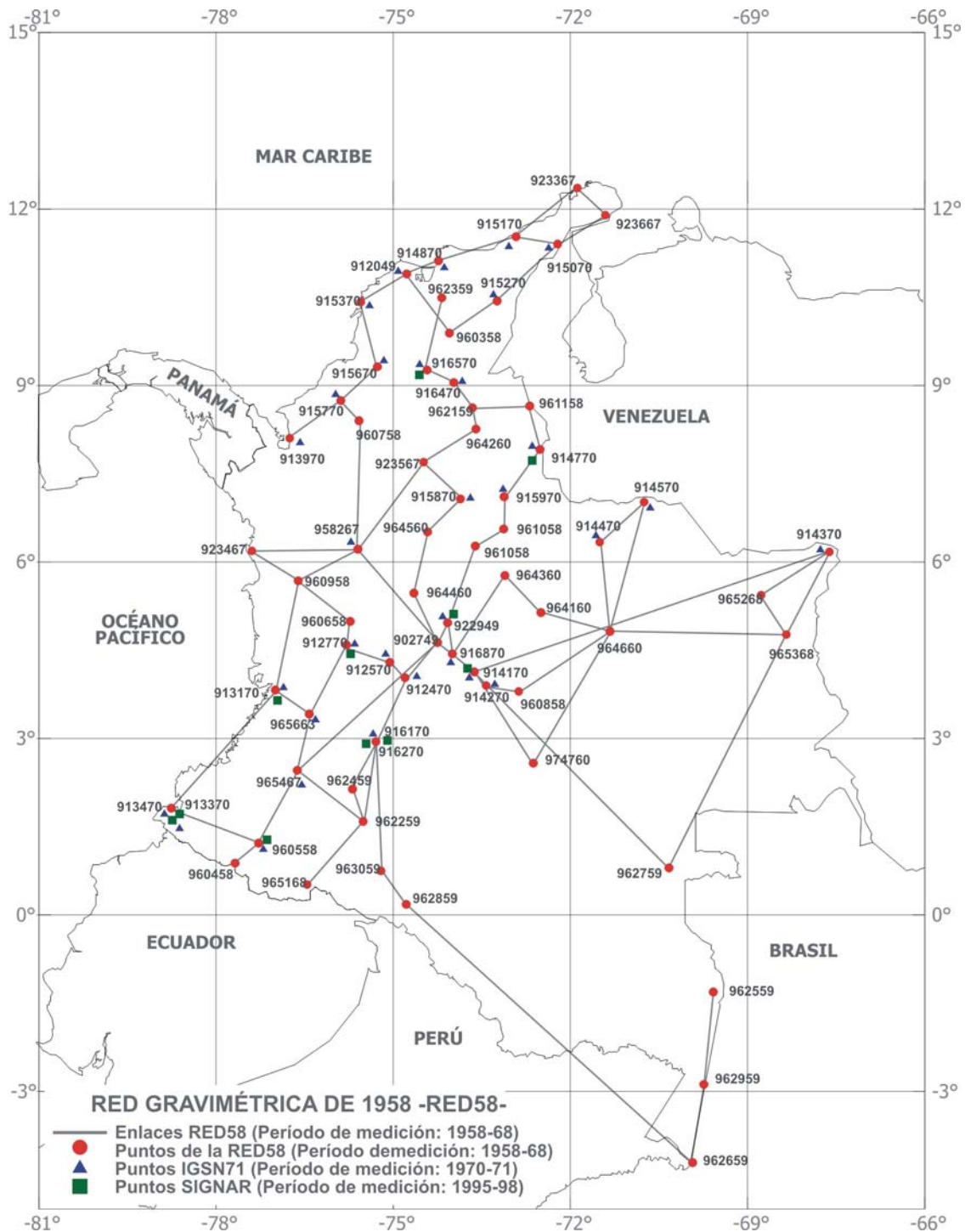


Figura 4.1 Red gravimétrica RED58

En 1995, se inicia la definición y realización de un nuevo sistema gravimétrico de referencia para Colombia, con el establecimiento de tres estaciones absolutas de gravedad mediante el método de caída libre (Martínez et al. 11995). Dichas estaciones fueron medidas por el DMA con un gravímetro absoluto transportable JILAG-5 ($\pm 0,03 \mu\text{ms}^{-2}$) y son la referencia de un circuito de

calibración instrumental y de la nueva red gravimétrica de primer orden del sistema SIGNAR (Sistema Gravimétrico Nacional de Referencia). Esta red está conformada por 40 estaciones, cada una con dos excéntricas, determinadas entre 1995 y 1998 con gravímetros LaCoste & Romberg. Cada estación ha sido conectada con, por lo menos, tres de las circundantes mediante ocho enlaces relativos. Igualmente, en las áreas fronterizas, ésta ha sido vinculada con las redes de primer orden (estaciones IGSN71 o RELANG77) de los países vecinos (Panamá, Ecuador, Perú y Brasil) y con tres estaciones absolutas existentes en Venezuela (figura 4.2).

En el diseño y planeación de la red de primer orden de SIGNAR se tuvo especial cuidado de ocupar estaciones anteriores (RED58, IGSN71 y RELANG77), de modo que se pudiesen determinar cambios temporales de la gravedad y tener las conexiones necesarias para vincular todas las líneas gravimétricas (observadas desde 1958) a la nueva red. Se encontraron once estaciones antiguas, cuyos valores de gravedad determinados dentro de la RED58 son muy imprecisos para estimar variaciones de la gravedad con el tiempo; no obstante, éstas sirven de conexión para reajustar las líneas gravimétricas (cerca de 10 000 puntos) usando como referencia las nuevas estaciones absolutas, las cuales corresponden con el sistema IAGBN (International Absolute Gravity Base Station Network, Boedecker and Fritzer 1986).

4.1.2 Ajuste de la red gravimétrica de primer orden

Red gravimétrica de primer orden de SIGNAR

La red gravimétrica de primer orden observada entre 1995 y 1998 fue ajustada de acuerdo con McConnell et al. (1979) (McConnell et al. 1995, McConnell 1998). El sistema de ecuaciones de observación corresponde con:

$$v_{i,i+1} = g_{i+1} - g_i - k_{1m} (l_i - l_{i+1}) - k_{2m} (l_i^2 - l_{i+1}^2) - D_q \Delta T_{i,i+1} - \Delta l_{i,i+1} \quad | p_i \quad (4.1)$$

o en expresión matricial:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \Delta \mathbf{l}, \quad \mathbf{P}_{ii} \quad (4.2)$$

Las incógnitas (vector \mathbf{x}) son los valores de gravedad de las estaciones ($g_i, g_{i+1}...$), los factores de escala (de primer y segundo orden, k_1, k_2) de los equipos y los coeficientes de deriva instrumental D en cada intervalo de tiempo q ($\Delta T_{i, i+1}$). Por cada gravímetro (m) utilizado se calculan los valores de k_1, k_2 y D . Las observaciones ($l_i, l_{i+1}, ...$) son corregidas por el efecto de las mareas lunisolares y expresadas en [ms^{-2}]. La matriz de pesos \mathbf{P}_{ii} de las observaciones se define tomando como base la matriz de cofactores \mathbf{Q}_{ii} :

$$q_{ii} = \frac{1}{p_i}; \quad \mathbf{P}_{ii} = \mathbf{Q}_{ii}^{-1} \quad (4.3)$$

Las ecuaciones de observación se asumen independientes entre sí (la matriz \mathbf{P}_{ii} es diagonal) y sus errores se compensan por el método paramétrico de los mínimos cuadrados.

En la primera iteración del ajuste se define una varianaza *a priori* de $0,5 \mu\text{ms}^{-2}$ ($\sim p = 400$) para todas las observaciones. En las iteraciones posteriores los nuevos pesos para cada gravímetro se asignan de acuerdo con:

$$\frac{p_{neu}}{p_{alt}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}; \quad \sigma_i^2 = \frac{\sum v_{i,i+1}^2}{r_i - n_i} \quad (4.4)$$

σ_0^2 es la desviación estándar con referencia al peso unitario de todas las observaciones y σ_i^2 es la varianza *a posteriori* para cada uno de los gravímetros involucrados. La suma v^2 en σ_i^2 se calcula con las observaciones r_i de los gravímetros correspondientes y las incógnitas n_i .



Figura 4.2 Red gravimétrica de primer orden de SIGNAR

Con el propósito de evitar errores groseros provenientes de posibles saltos en las lecturas de los instrumentos y, asumiendo que los errores de observación presentan una distribución normal, se

excluyen aquellas observaciones cuyas desviaciones sean mayores que la cantidad arbitraria C , según:

$$\left| v_{i,i+1} \sqrt{p_{i,i+1}} \right| > C \sigma_0 \tag{4.5}$$

C varía de interpolación a interpolación en el proceso de ajuste, al comienzo se define como 10 y después de la depuración de las observaciones se reduce hasta 3. El ajuste de la red se hace, inicialmente, como una red libre (sin fijar valores de gravedad) y posteriormente, se establecen las seis estaciones absolutas (tres en Colombia y tres en Venezuela) como puntos fijos. Este proceso se adelantó con el software GRAVPACK de Gravico Geoscience Inc. (McConnell 1998).

Los valores ajustados de la red nueva de primer orden [Anexo A] muestran un rango de gravedad de $11\,745,4 \mu\text{ms}^{-2}$ sobre todo el país. Sus errores medios están entre 3 nms^{-2} y 178 nms^{-2} (figura 4.3).

La evaluación de posibles cambios de la gravedad en el tiempo se adelanta solo con las seis estaciones IGSN71 (o RELANG77) ocupadas, tanto en 1977, como en 1995/98. Los valores antiguos de la RED58 no se tuvieron en cuenta, ya que, en primera instancia, esta red se observó con equipos Worden, cuya precisión de medición está en torno a $\pm 1 \mu\text{ms}^{-2}$ (Torge 1989) y, en segundo lugar, ésta no fue estrictamente ajustada. Las diferencias encontradas para aquellas seis estaciones varían entre $-0,81 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+0,32 \mu\text{ms}^{-2}$ en un período de 11 años (de 1977 a 1998) Sin embargo, como los puntos de referencia IGSN71 utilizados para el ajuste de RELANG77 en Colombia presentan errores medios de $\pm 0,35 \mu\text{ms}^{-2}$ (Morelli et al. 1974), se estableció que dichas variaciones no son significantes y, por tanto, dentro del nuevo ajuste de las líneas gravimétricas, no se incluyen parámetros referentes a cambios temporales de la gravedad.

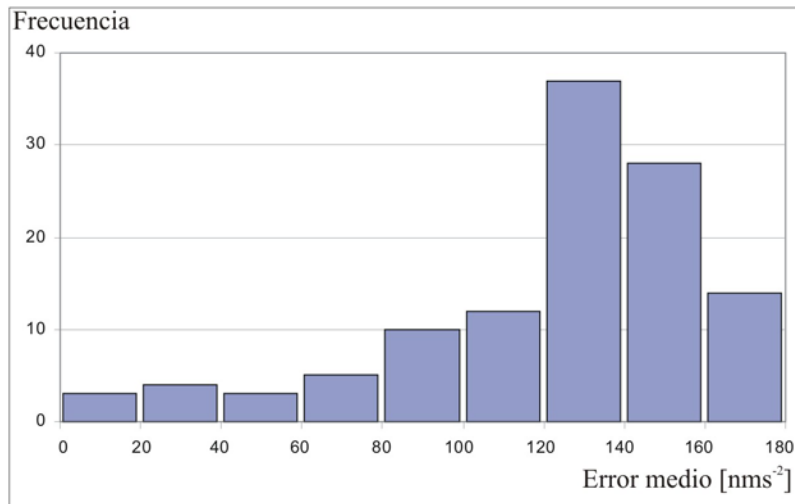


Figura 4.3 Frecuencia de los errores medios de los valores de gravedad de la red de primer orden de SIGNAR

Las estaciones absolutas establecidas en América Latina después de 1977 y la medición de la red de primer orden de SIGNAR en Colombia, junto con su vinculación a las redes de los países vecinos, condujeron a un nuevo ajuste de la red RELANG, el cual se ha denominado RELANG95 (McConnell et al. 1995).

Ajuste de la RED58 con referencia a SIGNAR

Considerando que la mayoría de las líneas gravimétricas existentes en Colombia fueron vinculadas a la RED58, su actualización a SIGNAR requiere del nuevo procesamiento de las mediciones de dicha red, utilizando como puntos de referencia estaciones vinculadas directamente a SIGNAR. Para el efecto, las observaciones de RELANG77, efectuadas en Colombia entre 1971 y 1977, son reprocesadas tomados como puntos fijos aquellas seis estaciones antiguas que también fueron ocupadas en 1995/98 [Sección 4.1.1]. Posteriormente, las 30 estaciones comunes entre RELANG77 y la RED58 se definen como puntos de referencia para procesar de nuevo las observaciones correspondientes a la RED58.

La principal ventaja del nuevo ajuste de la RED58 es la determinación de los factores de escala de los gravímetros Worden W32B y W397, que son con los que más del 60% de las líneas gravimétricas han sido medidas. Dado que no es posible adelantar una calibración empírica de estos instrumentos, la determinación de sus factores de escala se hace atendiendo las características descritas por Gantar and Morelli (1962a), Gantar and Morelli (1962b), Gantar and Morelli (1963) y Torge (1989).

Los gravímetros Worden constan de un sistema de cuarzo con una barra horizontal y un resorte vertical. Su principio de funcionamiento corresponde con una balanza de torsión, cuya palanca alcanza su estado de equilibrio (posición horizontal del plano formado por el centro de masas del sistema y el eje de giro de la palanca) en cada punto de medición. El tornillo de medida del resorte vertical (*small dial*), que es el que restablece el estado de equilibrio del sistema antes de cada medición, permite registrar diferencias de gravedad hasta de $3000 \mu\text{ms}^{-2}$ (aplicaciones geofísicas), por lo que es necesario un segundo resorte vertical (*large dial*), que reacomoda el sistema (introduce un *reset*) cada vez que se agota la capacidad del primer resorte, ampliándose de esta manera, el rango de medida hasta $52\,000 \dots 66\,000 \mu\text{ms}^{-2}$ (aplicaciones geodésicas).

Los factores de conversión proporcionados por el fabricante varían, de un instrumento a otro, entre $0,8 \mu\text{ms}^{-2}$ y $4,0 \mu\text{ms}^{-2}$ por cada unidad de lectura, estos factores se asumen constantes puesto que la curva de conversión correspondiente es lineal hasta el orden de 1×10^{-3} . No obstante, considerando que la precisión de lectura del *small dial* es de $\sim \pm 0,1 \mu\text{ms}^{-2}$, la omisión de los términos no lineales en dichas curvas puede generar inconsistencias hasta de $\pm 0,5 \mu\text{ms}^{-2}$. La función de calibración del *large dial*, cuya precisión de lectura está en torno a $\pm 1 \dots \pm 2 \mu\text{ms}^{-2}$, contiene términos periódicos con amplitudes que oscilan entre $2 \mu\text{ms}^{-2}$ y $30 \mu\text{ms}^{-2}$, los cuales también son obviados por el fabricante en las escalas de conversión. A éstos se suman los cambios seculares (sobre largos períodos de uso) del sistema íntegro, los cuales a través del tiempo pueden alterar los factores de conversión, generando incertidumbres con órdenes hasta de 1×10^{-3} por cada año de vetustez del equipo. La tabla 4.1 resume las diferentes fuentes de error provenientes exclusivamente, de las funciones de conversión de los gravímetros Worden.

La determinación del factor de escala del *large dial* requiere de la medición de la misma diferencia de gravedad en las diversas posiciones del tornillo de *reset*, de modo que la función de calibración sea independiente de dicha posición. Dado que las observaciones disponibles no permiten satisfacer esta condición, se toma como alternativa la determinación del factor de escala del tornillo de medida (*small dial*) para cada rango del *large dial*. Según la tabla 4.1, la precisión de la función de conversión del *small dial* es 10 veces más alta que la del *large dial*, esto garantiza que el método propuesto reduzca efectivamente los errores provenientes de la calibración de los equipos.

Tabla 4.1 Errores en las funciones de conversión de los gravímetros Worden

Parámetro	Resorte de medida (<i>small dial</i>)	Resorte de <i>reset</i> (<i>large dial</i>)
Precisión de la función de conversión	Función lineal $\pm 1 \times 10^{-4}$	Función no lineal $\pm 1 \times 10^{-3}$
Error de truncamiento de la función de conversión	$\pm 0,1 \dots 0,5 \mu\text{ms}^{-2}$	$\pm 2 \dots 30 \mu\text{ms}^{-2}$
Cambios seculares en la función de conversión	$\sim 1 \times 10^{-3} / \text{año}$	
Precisión de lectura	$\pm 0,1 \mu\text{ms}^{-2}$	$\pm 1 \dots 2 \mu\text{ms}^{-2}$

Dentro de este marco, los factores de escala para los gravímetros Worden W32B y W397 se calculan siguiendo el procedimiento clásico de la línea de calibración, la cual, en este caso, está conformada por las 30 estaciones de gravedad comunes entre la RED58 y RELANG77 (figura 4.1). Con el propósito de incluir en el análisis la dependencia del factor de escala con respecto a los rangos de medida (o *resets*), las observaciones de cada gravímetro se clasifican en cuatro intervalos de $\sim 3000 \mu\text{ms}^{-2}$, que cubren la variación total de la gravedad en Colombia ($\sim 12000 \mu\text{ms}^{-2}$) y, para cada uno de ellos, se estima el factor de escala correspondiente. Los resultados (tabla 4.2) muestran que la omisión del factor de escala en el procesamiento de los datos registrados con estos equipos puede generar inconsistencias de $1 \dots 2 \mu\text{ms}^{-2}$ en una diferencia de gravedad de $1000 \mu\text{ms}^{-2}$, que a nivel nacional pueden representar errores de onda larga de $\sim 25 \mu\text{ms}^{-2}$.

Tabla 4.2 Factores de escala para los gravímetros Worden W32B y W397

Intervalo de gravedad [10^{-5}ms^{-2}]	W32B		W397	
	Factor de escala	Error medio	Factor de escala	Error medio
977 100 - 977 400	0,997 95	$\pm 2,1 \times 10^{-4}$	0,998 21	$\pm 2,9 \times 10^{-4}$
977 400 - 977 700	0,998 98	$\pm 1,0 \times 10^{-4}$	0,998 86	$\pm 10,2 \times 10^{-4}$
977 700 - 978 000	0,999 43	$\pm 2,2 \times 10^{-4}$	0,999 43	$\pm 3,5 \times 10^{-4}$
978 000 - 978 400	1,001 04	$\pm 5,6 \times 10^{-4}$	1,000 18	$\pm 9,6 \times 10^{-4}$

Otro aspecto importante en el procesamiento de datos gravimétricos es la deriva instrumental, la cual, en el caso de los equipos Worden, presenta variaciones lineales entre $0,5 \dots 1 \mu\text{ms}^{-2}$ por hora y no lineales entre $1 \dots 10 \mu\text{ms}^{-2}$ por día. En este trabajo, la deriva se determina a través del desarrollo en series de Taylor de las mediciones z en función del tiempo t (Drewes 1978a):

$$z(t) = z(t_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 (t-t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_0 (t-t_0)^2 + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial t^3}\right)_0 (t-t_0)^3 + \dots \tag{4.6}$$

$$z(t) = z(t_0) + d_1 (t-t_0) + d_2 (t-t_0)^2 + d_3 (t-t_0)^3 + \dots$$

$z(t_0)$ es la lectura del gravímetro en el tiempo que se ha seleccionado de referencia para el cálculo de la deriva y $d_1 \dots d_3$ son los coeficientes de deriva correspondientes. Éstos no se han calculado día a día, sino *reset* por *reset*, puesto que un movimiento del *large dial* significa una reacomodación total del sistema. De acuerdo con Drewes (1978a), se ha introducido en la matriz

de cofactores de las observaciones (ecuación 4.7) una correlación algebraica de -0,5 entre dos mediciones consecutivas. Los resultados se presentan en el Anexo A.

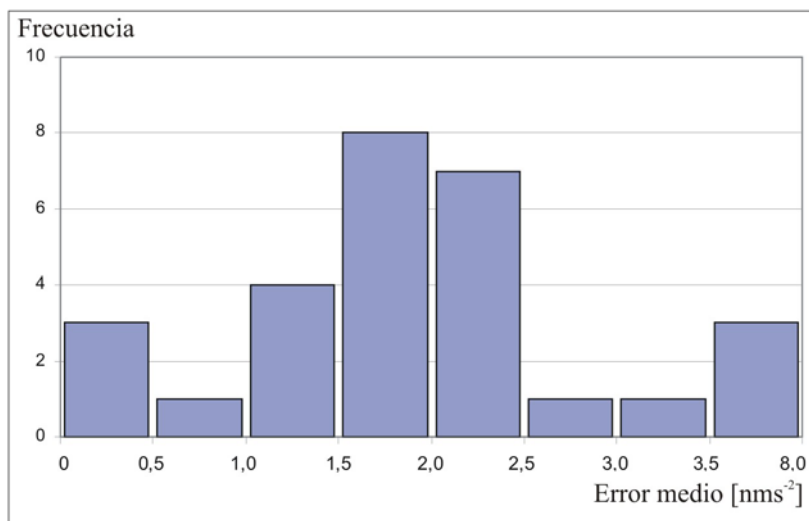


Figura 4.4 Frecuencia de los errores medios de los valores de gravedad de la RED58

El presente ajuste de la RED58 arroja precisiones bajas (entre $\pm 2,3\mu\text{ms}^{-2}$ y $\pm 7,4\mu\text{ms}^{-2}$; figura 4.4); sin embargo, éstas corresponden con los estándares de calidad manejados para mediciones de gravedad sobre distancias largas en la época en que dicha red fue establecida. Los valores obtenidos en este trabajo cambian, con respecto al ajuste de 1995 (Sánchez 1996), hasta en $30\mu\text{ms}^{-2}$.

4.1.3 Nuevo ajuste de las líneas gravimétricas

El establecimiento de las líneas gravimétricas en Colombia se inicia en 1958. Convencionalmente, éstas se miden sobre puntos de nivelación materializados, garantizando que cada intervalo de gravedad sea registrado dos veces, de modo que se facilite el modelamiento de derivas y saltos (o *taras*) instrumentales. El procedimiento de campo sigue las especificaciones del IAGS, quien, hasta inicios de los años noventas, procesaba la información recopilada en terreno por funcionarios del IGAC. El ajuste descrito en [4.1.1] es el único que se ha adelantado completamente en este Instituto. Actualmente, las líneas gravimétricas contienen cerca de 10 000 estaciones (figura 4.5), cuya referencia inicial corresponde con la RED58. Su determinación se interrumpió entre 1988 y 1995, pero las líneas medidas posteriormente se refieren a estaciones SIGNAR y se han procesado según se describe en las ecuaciones (4.1) ... (4.6).

Considerando que las líneas gravimétricas medidas entre 1958 y 1988 corresponden con más del 90% de los valores de gravedad del IGAC, el presente trabajo se ocupa de su nuevo procesamiento para evitar los posibles errores contenidos en los ajustes previos. Los principales aspectos del nuevo cálculo son:

- Las líneas gravimétricas se clasifican en cinco subredes, cuyos puntos de conexión son estaciones de referencia (figura 4.5). De esta forma, los valores de gravedad para aquellos puntos medidos en diferentes circuitos son compatibles. Anteriormente, las líneas gravimétricas se procesaban individualmente, lo que hacía que intervalos de gravedad

medidos entre puntos pertenecientes a diferentes líneas presentaran inconsistencias frente a los valores calculados.

- Los puntos fijos en este ajuste corresponden con estaciones SIGNAR, cuyo peso equivale al cuadrado inverso de su error medio. En los procesamientos anteriores se tomaron como referencia estaciones de la RED58 (errores medios altos [Sección 4.1.2]) y se asignaron pesos iguales a uno.
- La influencia por mareas lunisulares se calcula según Wenzel (1994a) y Wenzel (1994b).
- La deriva instrumental se obtiene mediante el procedimiento descrito en [4.1.2].
- El procesamiento de la información gravimétrica incluye la aplicación de los factores de escala de todos los gravímetros utilizados. Para los instrumentos LaCoste & Romberg (G11, G46, G67), los cuales se han patronado empíricamente en una línea de calibración, se aplican los factores de escala obtenidos en el ajuste de RELANG95 (McConnell et al. 1995), para los gravímetros Worden W32B y W397 se utilizan los factores de escala calculados en el nuevo procesamiento de la RED58 [4.1.2] y para los gravímetros restantes (W32, W106, W147, W682 y W178), con los cuales se ha medido menos del 10% de las líneas gravimétricas, se determinan los factores de escala [Anexo A] junto con los valores de gravedad; es decir, que éstos se incluyen como incógnitas en el ajuste. En los procesamientos anteriores los factores de escala se asumieron iguales a uno.
- El modelo estocástico del ajuste incluye la correlación algebraica entre las diferencias de gravedad Δl que se derivan de dos lecturas l consecutivas. Dicha correlación es tenida en cuenta, ya que, las líneas gravimétricas se miden como un perfil y cada lectura l_i (excepto en los extremos de cada circuito) está implícita en dos diferencias de gravedad, de modo que su correlación equivale a -0,5 (Drewes 1978a). De acuerdo con esto, la ecuación de compensación se escribe como:

$$\begin{aligned}
 v_{i,i+1} &= g_{i+1} - g_i - k_{lm} (l_i - l_{i+1}) - D_q \Delta T_{i,i+1} - \Delta l_{i,i+1} \quad | p_i, p_{i,i+1} \\
 q_{ii} &= \frac{1}{p_i}; \quad q_{i,i+1} = q_{i+1,i} = -0,5 \sqrt{q_{ii} q_{i+1,i+1}}; \quad \mathbf{P}_{ll} = \mathbf{Q}_{ll}^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

o, en notación matricial:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \Delta \mathbf{l} \quad | \mathbf{P}_{ll} \tag{4.8}$$

La matriz \mathbf{Q}_{ll} tiene valores no solo en la diagonal principal, sino también en las vecinas, así la matriz de pesos \mathbf{P}_{ll} presenta cantidades en todos sus elementos. En los procesamientos anteriores a éste, se asumieron las observaciones independientes y la matriz \mathbf{P}_{ll} equivalía a la Idéntica.

- Considerando que los errores generados tácitamente por los gravímetros Worden son mayores que las magnitudes de los posibles cambios de la aceleración de la gravedad con el tiempo, se asume la no existencia de dichos cambios y las observaciones realizadas en diferentes épocas se combinan indistintamente. Sin embargo, cada gravímetro es ponderado de acuerdo con (4.4).

- El ajuste se desarrolla iterativamente hasta que menos del 1% de las observaciones procesadas tengan residuales mayores que $3\sigma_0$. Aquéllas, cuyos residuales son mayores que $5\sigma_0$, se eliminan, a no ser que sean determinantes en la estructura de la red, ante lo cual se les asigna un peso equivalente a 0,01.

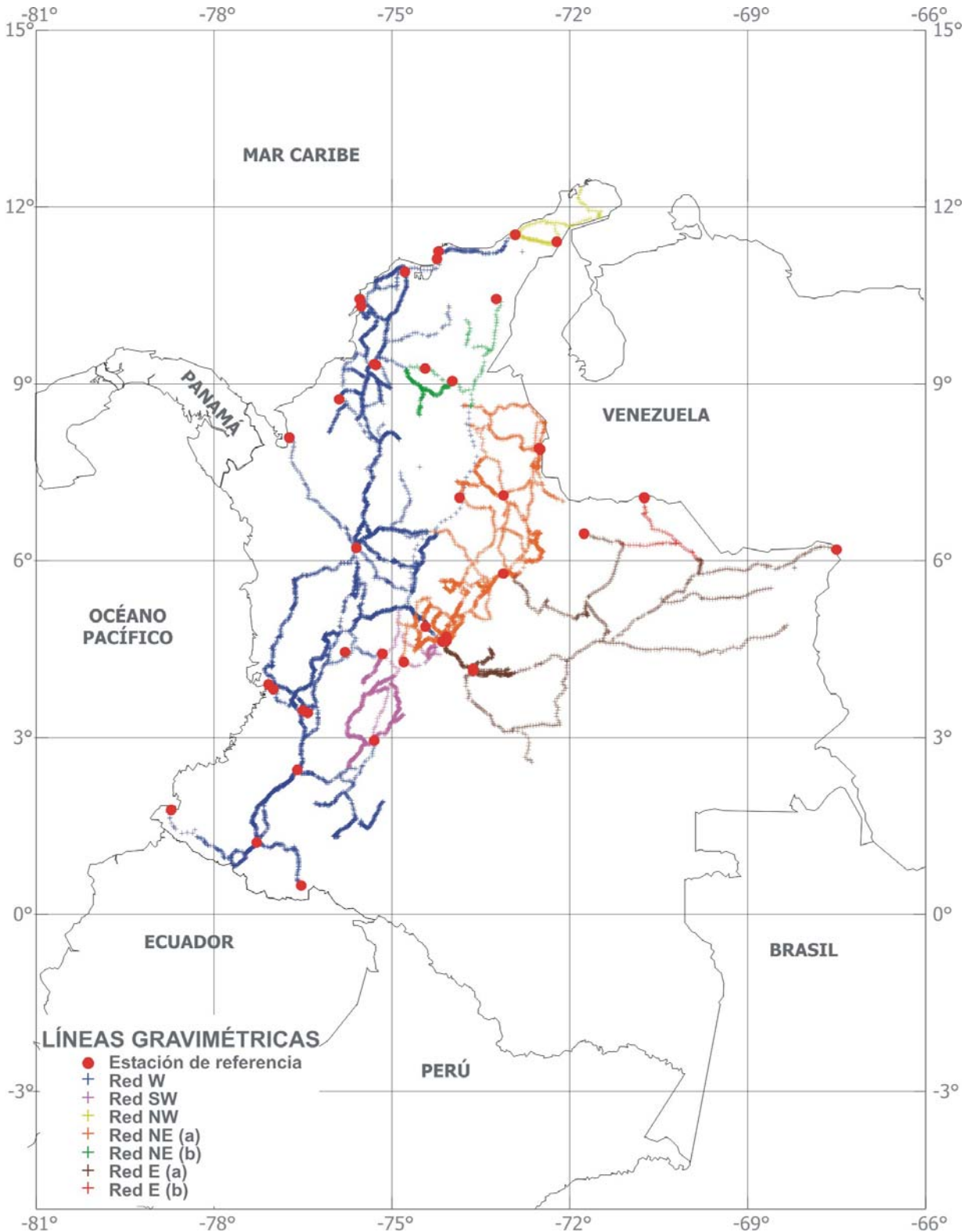


Figura 4.5 Líneas gravimétricas según su clasificación en las subredes ajustadas

Tabla 4.3 Indicadores estadísticos de las subredes en las que se han clasificado las líneas gravimétricas para su nuevo ajuste

Parámetro	Red W	Red SW	Red NW	Red NE		Red E	
				A	B*	A	B*
Número de observaciones	11932	2085	392	5538	747	2414	215
Número de estaciones de referencia	26	6	2	18	4	10	2
Número de valores de gravedad desconocidos	4450	814	145	1944	268	871	71
σ_0	0,40	0,29	0,47	0,40	0,44	0,45	0,91
Promedio de los errores medios $\bar{\sigma}_i$ [μms^{-2}]	1,08	0,93	1,16	0,88	1,43	1,79	2,88
σ_i [μms^{-2}]	Mínimo	0,31	0,23	0,47	0,32	0,42	1,01
	Máximo	4,87	3,87	2,33	2,19	5,29	4,42
Observaciones con desviaciones entre $3\sigma_0 < v < 5\sigma_0$	51	22	-	22	6	1	-

*Las redes NE y E han sido subdivididas, dada la menor calidad de algunos de sus circuitos, los cuales se agrupan bajo la denominación "B".

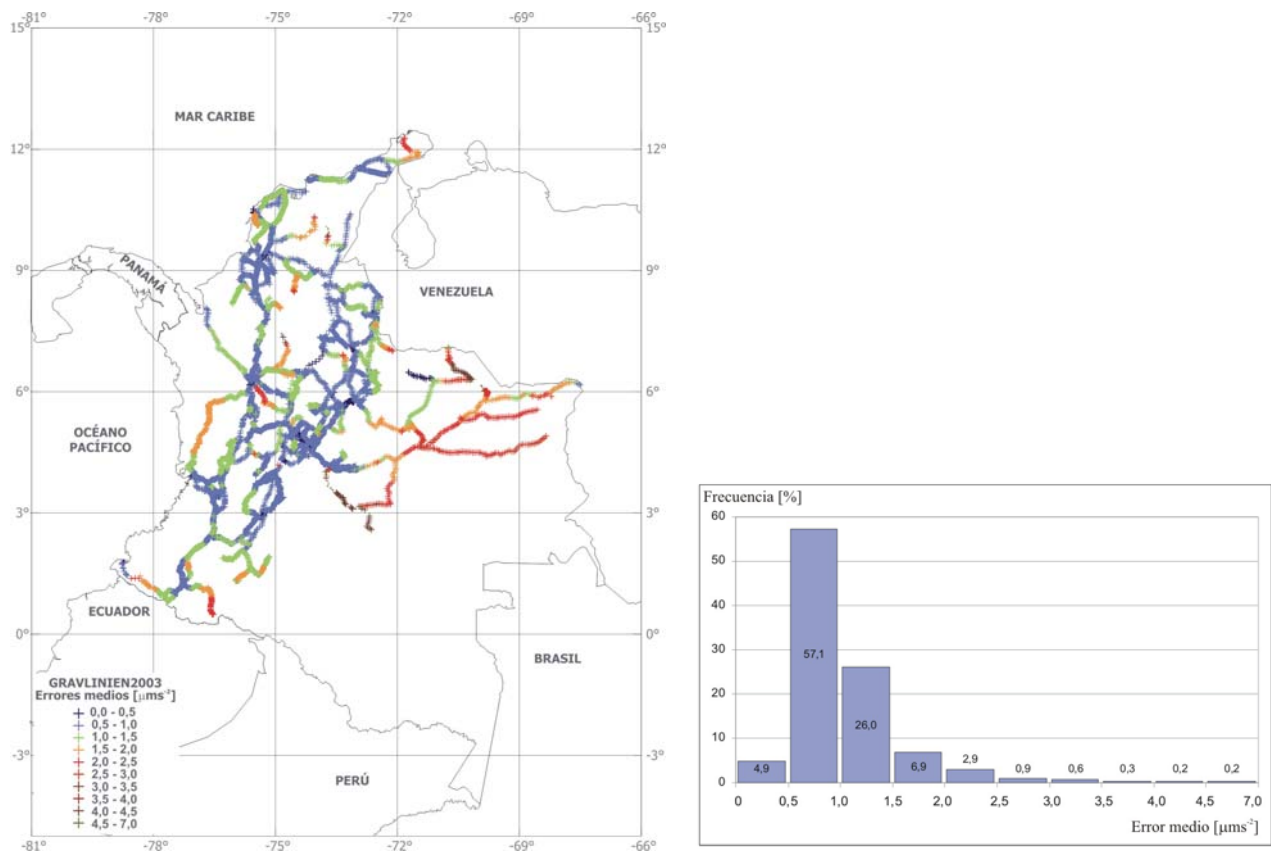


Figura 4.6 Errores medios de las líneas gravimétricas (ajuste GRAVLINIEN2003)

La tabla 4.3 muestra un resumen del ajuste de las líneas gravimétricas según las subredes definidas. Las mejores precisiones $< \pm 0,5 \mu\text{ms}^{-2}$ corresponden a las estaciones medidas con instrumentos LaCoste & Romberg, posteriormente se encuentran los valores determinados con Worden, cuyo error medio está alrededor de $\pm 1 \mu\text{ms}^{-2}$ y, finalmente, aquellos puntos en los extremos de las redes donde, por no haber estaciones de referencia para un control directo, los errores de medición se propagan de forma tal que alcanzan magnitudes hasta de $> \pm 2 \mu\text{ms}^{-2}$. La figura 4.6b representa el histograma correspondiente. Los valores obtenidos en este nuevo ajuste se denominan en adelante GRAVLINIEN2003.

La comparación de los valores GRAVLINIEN2003 con el ajuste descrito en [4.1.1] muestra diferencias entre $-40 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+30 \mu\text{ms}^{-2}$, cuya mayor frecuencia está en torno a $\pm 1,0 \mu\text{ms}^{-2}$ (figura 4.7). Las mayores discrepancias coinciden con los gradientes de gravedad más fuertes, justo donde las líneas gravimétricas cubren las pendientes topográficas más pronunciadas. Dichas diferencias provienen de los errores incluidos en los valores anteriores [Sección 4.1.1] al omitir los factores de escala instrumentales. El valor promedio de las diferencias ($-16 \mu\text{ms}^{-2}$) señala, tanto la discrepancia entre el nivel de IGSN71 (o RELANG77) y el de las nuevas estaciones absolutas de gravedad, como los errores sistemáticos provenientes de la omisión de la deriva instrumental, de la ponderación de los gravímetros y el apoyo en estaciones de referencia de baja precisión. Estos errores sistemáticos presentan una magnitud 10 veces mayor que el promedio de los errores medios obtenidos en el nuevo ajuste (tabla 4.3), lo que ha influenciado desfavorablemente los modelos geoidales que los han incluido. De allí, este nuevo procesamiento es indispensable para alcanzar el objetivo del presente trabajo.

4.1.4 Datos gravimétricos provenientes de Defense Mapping Agency (DMA)

DMA promovió diferentes actividades geodésicas en América Latina especialmente, aquellas relacionadas con la determinación de redes de control horizontal, vertical y de gravedad; las dos primeras como base para la producción de planchas topográficas y la tercera como apoyo para el desarrollo de exploración geofísica. Dicha promoción se llevó a cabo a través del IAGS (Inter American Geodetic Service), el cual dependía directamente de DMA y tenía una oficina operativa en cada Instituto Geográfico de los países latinos. IAGS instruía sobre los procedimientos de campo a los agrimensores nacionales y se ocupaba del procesamiento de la información recopilada. Con la fundación de NIMA (National Imagery and Mapping Agency, actualmente NGA -National Geospatial-Intelligence Agency-) cuarenta años después, las 17 oficinas de IAGS en América Latina se agruparon en tres (Lima, Asunción y México) y, aunque la cooperación no es tan estrecha como antes, NIMA (o NGI) aún apoya proyectos geodésicos específicos en la región.

El banco de datos de DMA contiene, en Colombia, cerca de 10 200 valores de gravedad, de los cuales 6 000 son de las líneas gravimétricas del IGAC (figura 4.8). Las coordenadas horizontales (latitud, longitud) se obtuvieron a partir de cartografía referida al Datum BOGOTÁ y las alturas para las líneas gravimétricas corresponden con las niveladas en la red vertical. Para los proyectos restantes, las alturas se interpolan a partir de cartografía. Los valores de gravedad se refieren a IGSN71.

La comparación del banco de datos de DMA con los valores GRAVLINIEN2003 requiere de la depuración previa de las coordenadas horizontales de los puntos contenidos por el DMA, ya que, éstos no presentan algún identificador (nombre o número) que facilite su asociación con los valores correspondientes en GRAVLINIEN2003. Para el efecto, las coordenadas DMA son transformadas al mismo sistema, en el que se encuentran definidas las posiciones de

GRAVLINIEN2003; es decir, a SIRGAS (Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas), o su equivalente en Colombia, MAGNA (Marco Geocéntrico Nacional de Referencia). No obstante, dada la baja precisión de las coordenadas horizontales para los valores de gravedad (~500 m), se utiliza como referencia la altura de los puntos para encontrar la relación unívoca entre los dos conjuntos de datos.

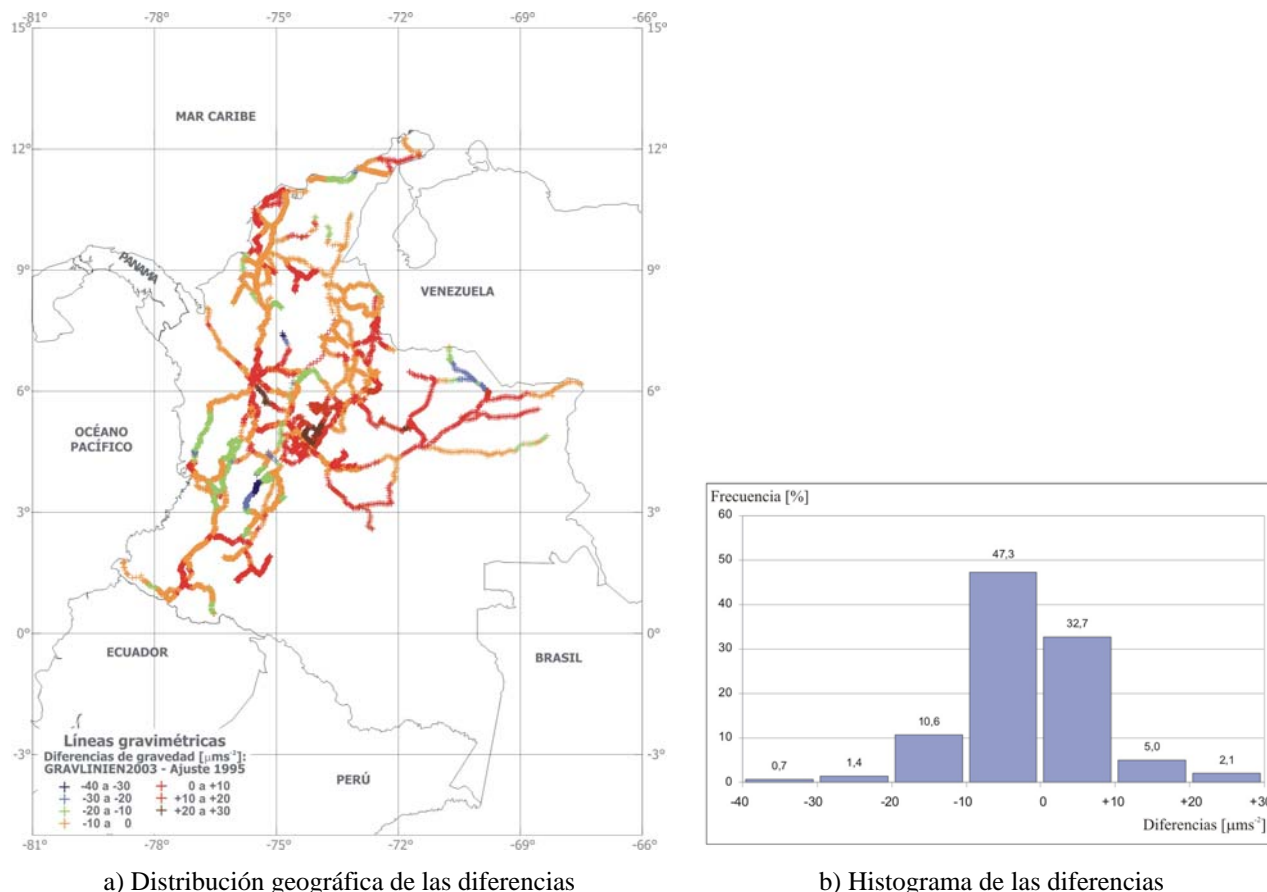


Figura 4.7 Diferencia entre los valores de gravedad obtenidos en el ajuste de 1995 y GRAVLINIEN2003

Las diferencias entre los valores de gravedad para los 6 000 puntos comunes varían entre $-18 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+16 \mu\text{ms}^{-2}$; sin embargo, no se identifica una discrepancia sistemática que permita reducir estas cantidades. Para el presente trabajo, se da prelación a los valores GRAVLINIEN2003, puesto que no se conocen, ni el procedimiento de cálculo, ni las estaciones de referencia utilizadas en el ajuste del DMA. Los puntos restantes (cerca de 4200, figura 4.8), se encuentran en lugares donde el IGAC no tiene valores de gravedad, de allí, se asume que éstos no contienen errores sistemáticos y se incluyen en la determinación del modelo geoidal sin tratamiento adicional.

4.1.5 Datos gravimétricos provenientes de compañías petroleras

Las reservas de recursos naturales energéticos existentes en Colombia han sido exploradas durante los últimos sesenta años por compañías nacionales y extranjeras, que se apoyan en levantamientos gravimétricos para aumentar la precisión de sus predicciones. Desafortunadamente, muchos de estos proyectos no pueden incluirse en la determinación de modelos geoidales, puesto que son clasificados como *confidenciales* hasta tanto el reservorio

correspondiente no se agote. Posteriormente, al ser *liberados*, éstos se entregan a bancos internacionales de datos, normalmente en forma de anomalías Aire Libre, con coordenadas arbitrarias y sin indicaciones sobre el datum gravimétrico utilizado. De esta forma, no es posible identificar claramente la calidad de la información y no queda otra alternativa que incluirlos tal cual han sido cedidos. Este tipo de datos fueron tenidos en cuenta para los cálculos previos del geoide en Colombia [Sección 2.3].

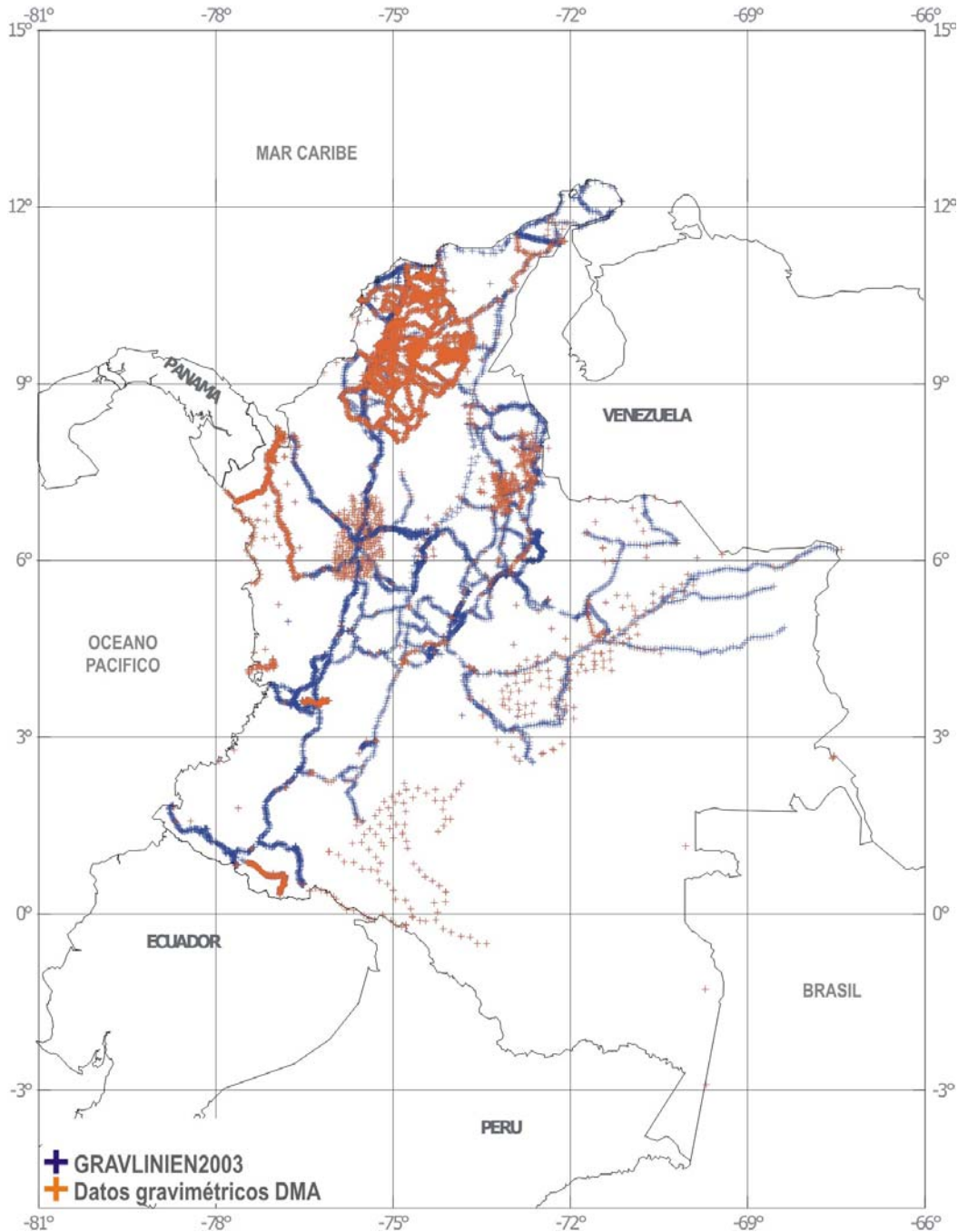


Figura 4.8 Valores de gravedad de DMA en Colombia

El mayor banco de datos gravimétricos existente en el país es mantenido por la compañía nacional de petróleos ECOPELROL (Empresa Colombiana de Petróleos), quien ha cedido, para el presente trabajo, cerca de 85000 puntos de gravedad, con la cantidad necesaria de características para la evaluación juiciosa de su calidad. Dichos puntos se encuentran agrupados

en 120 proyectos, los cuales proporcionan la siguiente información: año de medición, coordenadas horizontales (con identificación del datum correspondiente), altura (nivelada o extraída de cartografía), valor de gravedad (con identificación del *posible* datum) y anomalías Aire Libre y de Bouguer (incluyendo elipsoide de referencia para el cálculo de la gravedad teórica y la densidad de masas utilizada).

La depuración de los datos de ECOPETROL se inicia con la identificación de aquellos puntos contenidos más de una vez, como por ejemplo las líneas gravimétricas del IGAC, las cuales fueron proporcionadas una vez por DMA y otra vez por IGAC; o el banco de datos de DMA [Sección 4.1.4], el cual también está contenido completamente en la base de ECOPETROL. Como resultado de esta etapa se cuenta, efectivamente, con 65 300 valores de gravedad (95 proyectos), que son analizados para establecer su calidad y referencia gravimétrica.

Amén las características proporcionadas, existe incertidumbre sobre el datum gravimétrico y el nivel absoluto de gravedad de los valores contenidos en cada proyecto. Por tanto, se revisa la compatibilidad de dichos valores con los de GRAVLINIEN2003 (o SIGNAR). Para el efecto, a partir de cada proyecto, se interpolan los valores de gravedad que tendrían los puntos GRAVLINIEN2003 si fuesen parte de dicho proyecto; posteriormente, éstos son comparados con los valores reales correspondientes, sus diferencias (valores interpolados - valores observados) indican la compatibilidad de los valores de ECOPETROL o identifican las posibles discrepancias sistemáticas existentes en el proyecto analizado. Dicha interpolación se adelanta por el método de los mínimos cuadrados (llamado también predicción o colocación, Drewes 1976), utilizando anomalías de Bouguer. El esquema procedimental es:

- Determinación de las anomalías de Bouguer para los puntos de ECOPETROL. Para el efecto, se utiliza la fórmula de Somigliana para el cálculo de la gravedad normal (γ) a partir del elipsoide GRS80 (Moritz 1980a), el gradiente vertical normal ($\partial\gamma/\partial h$) y la densidad de masas convencional $\rho = 2670 \text{ kg m}^{-3}$:

$$\Delta g_B = g - \gamma - \frac{\partial\gamma}{\partial h} H - 2\pi G \rho H \quad (4.9)$$

con $\frac{\partial\gamma}{\partial h} = 3,086 \mu\text{ms}^{-2}$ y $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

- La interpolación lineal de las anomalías de Bouguer se adelanta según el modelo Kolmogorov-Wiener (p. ej. Moritz 1980b, Drewes 1978b):

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_p = \mathbf{c}^T \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{g} \quad (4.10)$$

$\Delta \mathbf{g}$ son las anomalías Bouguer observadas en el proyecto específico, \mathbf{C} es la matriz varianza-covarianza de las anomalías observadas y \mathbf{c} es el vector de covarianza entre las anomalías observadas y las interpoladas.

Las covarianzas empíricas entre las anomalías observadas se representan mediante:

$$C_{\Delta g}(s_{ik}) = E \{ \Delta g_i \cdot \Delta g_k \} \quad (4.11)$$

donde E indica valor esperado. i, k son los puntos de observación y s_{ik} es la distancia entre ellos. Los valores $C_{\Delta g}$ se clasifican en 30 intervalos de clase, cuyos valor medio y

varianza $C_{\Delta g}(s=0) = C_0$ deben ser calculados. El peso para cada intervalo de clase equivale al número de productos ($\Delta g_i \Delta g_k$) que contiene. De esta forma, las covarianzas empíricas se aproximan a través de la función exponencial:

$$C(S_{ik}) = a e^{-b \cdot S_{ik}} \quad (4.12)$$

a y b se determinan mediante un ajuste paramétrico del método de los mínimos cuadrados. La matriz \mathbf{C} es simétrica y todos sus elementos tienen valores diferentes a cero, su diagonal principal ($i = k$) contiene la varianza C_0 . Los elementos del vector \mathbf{c} se obtienen en función de la distancia entre el punto interpolado y los valores observados. La figura 4.9 muestra un ejemplo de la función covarianza calculada de acuerdo con este procedimiento.

El error de interpolación o de predicción ($m_{\Delta g}^2$) es calculado con base en (Moritz 1963):

$$m_{\Delta g}^2 = C_0 - \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c} \quad (4.13)$$

éste depende, principalmente, de la distancia mínima entre el punto interpolado y los valores de anomalía utilizados para su interpolación.

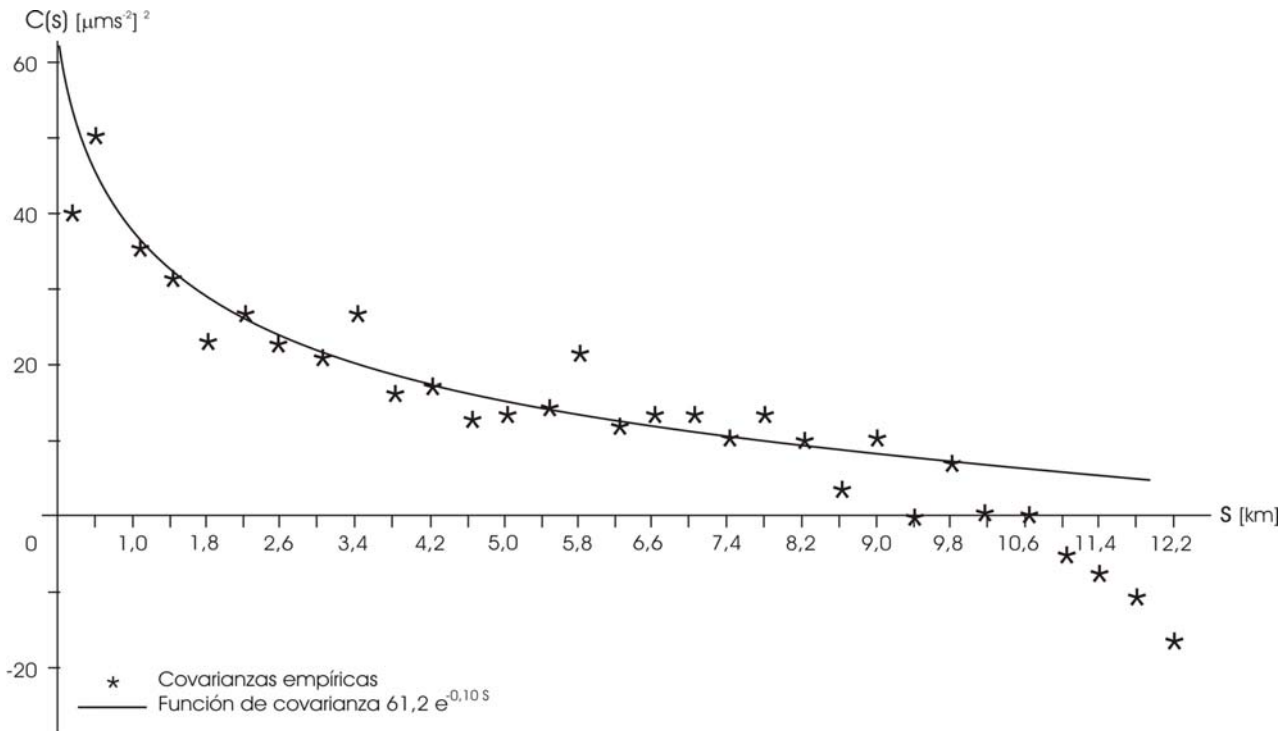


Figura 4.9 Covarianzas empíricas y su representación mediante una función exponencial de covarianza en la interpolación de anomalías de Bouguer

- Los puntos GRAVLINIEN2003 existentes en las áreas de cada proyecto de ECOPETROL son interpolados a partir de los 50 valores de anomalía más cercanos siguiendo las ecuaciones (4.10) ... (4.12) y utilizando el programa desarrollado por Drewes (1978b). Los valores de anomalía interpolados, cuyo error de predicción es menor que $\pm 10 \mu\text{ms}^{-2}$, se utilizan para estimar las diferencias con respecto a las anomalías

reales. El promedio de las diferencias indica la discrepancia sistemática de los proyectos de ECOPETROL con respecto a SIGNAR.

A modo de ejemplo, a continuación se presenta en detalle la evaluación del proyecto GBCN84 (codificación ECOPETROL). Éste contiene 394 puntos de gravedad entre $[\varphi=2,6^{\circ}\text{N}, \lambda=75,7^{\circ}\text{W}]$ y $[\varphi=4,2^{\circ}\text{N}, \lambda=74,5^{\circ}\text{W}]$, zona en la que también existen 125 estaciones de la líneas gravimétricas del IGAC (valores GRAVLINIEN2003). Las distancias entre los puntos de ECOPETROL y del IGAC son menores que 5 km (figura 4.10). A partir de las anomalías de Bouguer calculadas con los puntos del proyecto GBCN84, se interpolan (según las ecuaciones (4.10) ... (4.12)) las anomalías correspondientes para las 125 estaciones del IGAC y se comparan los valores de gravedad interpolados con los verdaderos (GRAVLINIEN2003). La tabla 4.4 muestra las cantidades obtenidas para los primeros 15 puntos.

El promedio de las diferencias para aquellos valores interpolados, cuyo error de predicción es menor que $\pm 10 \mu\text{ms}^{-2}$ (14 puntos), es $-164,19 \mu\text{ms}^{-2}$; mientras que, para los puntos, cuyo error de predicción es menor que $\pm 20 \mu\text{ms}^{-2}$ (38 puntos), dicho promedio tiene una magnitud de $-165,06 \mu\text{ms}^{-2}$. Estas cantidades indican que el nivel de gravedad del proyecto GBCN84 está aproximadamente, $165 \mu\text{ms}^{-2}$ sobre el nivel de SIGNAR, entendiéndose así, que éste está referido al sistema gravimétrico de Potsdam y que por tanto, sus valores de gravedad deben ser corregidos en $-164,2 \mu\text{ms}^{-2}$ para que sean compatibles (homogéneos) con SIGNAR.

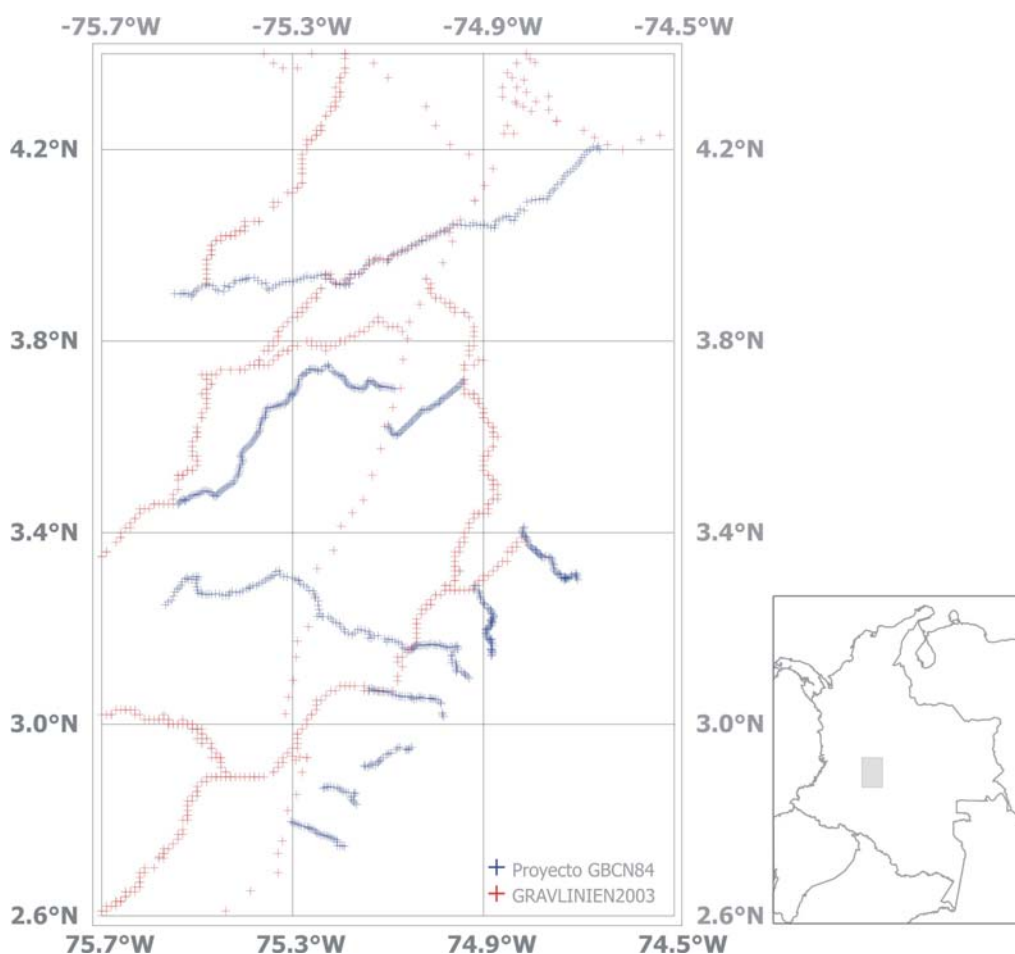


Figura 4.10 Ejemplo de la evaluación de los datos gravimétricos proporcionados por ECOPETROL: Proyecto GBCN84

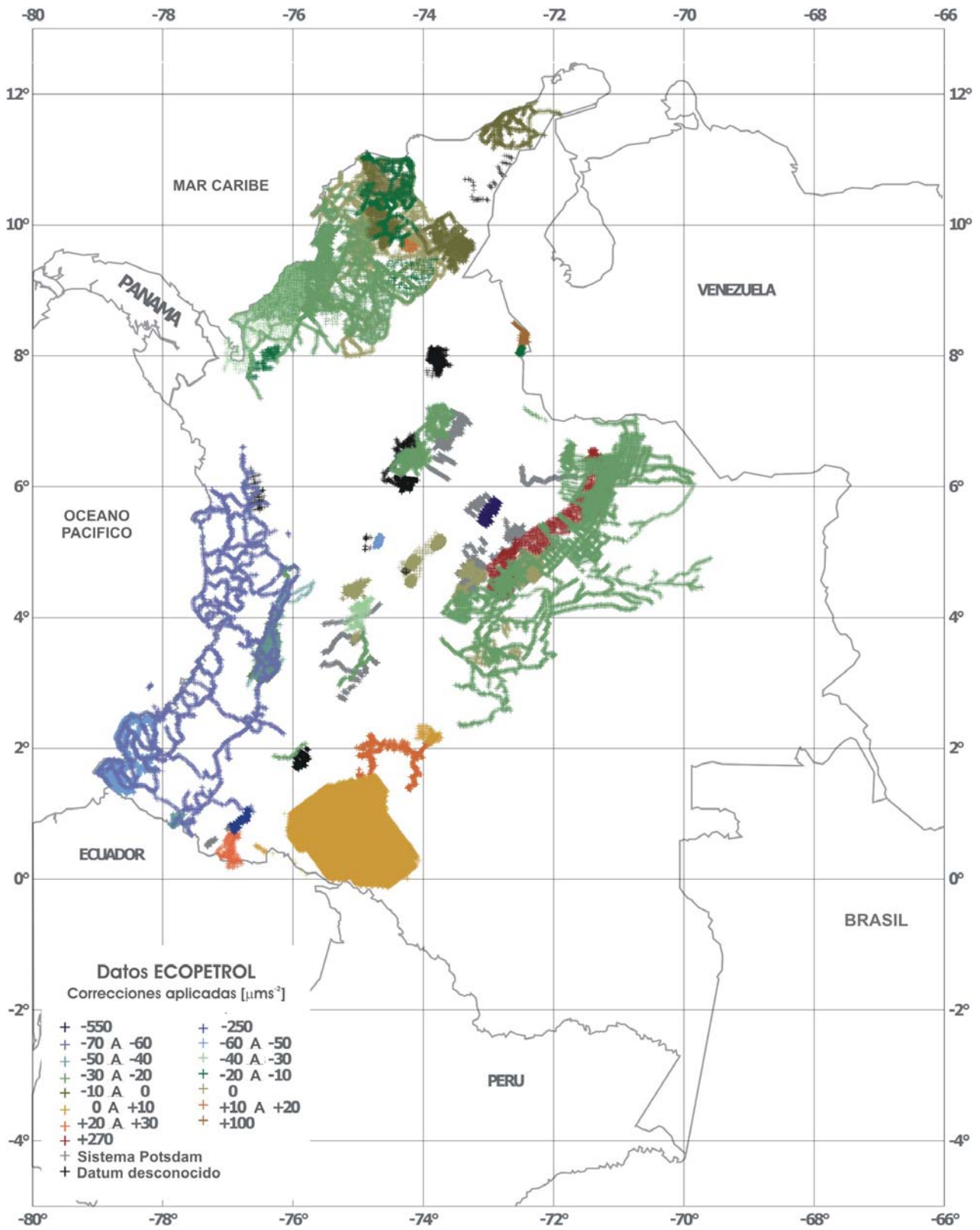


Figura 4.11 Correcciones utilizadas en la depuración de los datos gravimétricos proporcionados por ECOPETROL

Tabla 4.4 Interpolación de anomalías de Bouguer para la evaluación de los datos gravimétricos proporcionados por ECOPETROL: Proyecto GBCN84

ϕ [°]	λ [°]	$\Delta\tilde{g}$ [μms^{-2}]	$\pm m_{\Delta\tilde{g}}^2$ [μms^{-2}]	Gravedad interpolada (\tilde{g}) [μms^{-2}]	Gravedad observada (g_{Beob}) [μms^{-2}]	$g_{Beob} - \tilde{g}$ [μms^{-2}]
3,72 N	74,94 W	-1292	2	9778547	9778388,75	-158,25
3,71 N	74,94 W	-1287	2	9778541	9778398,75	-142,25
3,95 N	75,15 W	-1224	3	9778620	9778454,38	-165,62
3,70 N	74,94 W	-1284	4	9778244	9778064,38	-179,62
4,00 N	75,05 W	-1361	4	9778542	9778376,88	-165,12
3,75 N	74,92 W	-1285	4	9778579	9778409,38	-169,62
3,94 N	75,17 W	-1235	5	9778630	9778473,75	-156,25
3,92 N	75,21 W	-1343	5	9778493	9778336,25	-156,75
3,92 N	75,21 W	-1343	7	9778466	9778293,75	-172,25
3,93 N	75,22 W	-1352	7	9778492	9778328,75	-163,25
3,94 N	75,16 W	-1224	8	9778621	9778451,88	-169,12
4,01 N	75,03 W	-1377	9	9778535	9778365,63	-169,37
4,01 N	75,03 W	-1377	10	9778528	9778362,50	-165,50
4,03 N	74,98 W	-1370	10	9778580	9778414,38	-165,62
3,93 N	75,18 W	-1272	12	9778602	9778445,63	-156,37

La evaluación de los proyectos de ECOPETROL permite su clasificación en cinco grupos: el primero contiene aquellos datos (14%) referidos a IGSN71 (o SIGNAR) y que no requieren de alguna corrección. El segundo grupo está conformado por aquellos proyectos (6%) referidos al sistema Potsdam y cuyas correcciones oscilan entre $-137,57 \mu\text{ms}^{-2}$ y $-189,41 \mu\text{ms}^{-2}$. El tercer grupo se refiere a aquellos proyectos (55%) que a pesar de estar referidos a IGSN71, presentan errores sistemáticos pequeños, cuyas correcciones están entre $-28,00 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+16,85 \mu\text{ms}^{-2}$. Estos valores corresponden a las diferencias entre el ajuste anterior de las líneas gravimétricas y GRAVLINIEN2003 [Sección 4.1.3, figura 4.7]. El grupo cuatro contiene los proyectos (22%) referidos a un datum gravimétrico local desconocido, cuyas diferencias sistemáticas con respecto a SIGNAR pudieron establecerse entre $-60 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+60 \mu\text{ms}^{-2}$, con algunos valores extremos de $-556 \mu\text{ms}^{-2}$, $-254 \mu\text{ms}^{-2}$, $+103 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+270 \mu\text{ms}^{-2}$. Finalmente, el quinto grupo hace referencia a aquellos proyectos (3%) en los que no fue posible identificar una discrepancia sistemática entre sus valores de gravedad y los de SIGNAR. La figura 4.11 muestra la distribución geográfica de las correcciones aplicadas. Igualmente, en el Anexo B se amplían algunos ejemplos.

4.2 Información gravimétrica aérea

Los datos gravimétricos terrestres disponibles (IGAC, DMA y ECOPETROL) se encuentran distribuidos sobre las zonas pobladas del país (región Andina y áreas costeras en el Pacífico y Atlántico) y los reservorios de recursos energéticos (Costa Caribe y Llanos Orientales). El área de la selva amazónica, que cubre más del 40% del territorio nacional, se constituye en una barrera natural para el desarrollo de levantamientos geodésicos de todo tipo, por tanto, allí sólo se dispone de algunas estaciones terrestres de gravedad pertenecientes a la red de primer orden. En 1987, la compañía AMOCO Oil Company, realizó un levantamiento aerogravimétrico sobre dicha zona (figura 4.12a) del cual, ha dispuesto para el presente trabajo, la siguiente información: coordenadas UTM (x, y), coordenadas geográficas (ϕ , λ) referidas a WGS72 (World Geodetic System 1972), anomalías Aire Libre, anomalías de Bouguer (con densidades de 2670 kg m^{-3} y

2400 kg m^{-3}), reducción topográfica (para ambas densidades), altura topográfica y altura de vuelo. En total son cerca de 320 000 registros de gravedad, distribuidos en 44 perfiles en dirección este-oeste y 46 en dirección norte-sur. La distancia entre éstos es de, aproximadamente, 20 km. El informe técnico correspondiente indica que los valores de gravedad se refieren a IGSN71 y que las anomalías están calculadas sobre el WGS72. Infortunadamente, no se presentan mayores indicadores sobre la precisión de la información proporcionada.

El nivel de las anomalías de Bouguer fue evaluado siguiendo la metodología descrita en [4.1.5]. Para el efecto, las coordenadas y los valores de anomalías se convirtieron al elipsoide GRS80, se interpolaron las anomalías de Bouguer para las estaciones terrestres existentes (figura 4.12a) y se hizo la comparación del caso. Las diferencias entre las anomalías observadas en las estaciones terrestres y las interpoladas a partir de los valores de AMOCO ($\Delta g_{obs} - \Delta \tilde{g}$) oscilan entre $-18,3 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+12,1 \mu\text{ms}^{-2}$, siendo su valor medio $-6,8 \mu\text{ms}^{-2}$. Considerando que el error de interpolación es mayor que este promedio, se concluye que los valores de anomalía proporcionados son consistentes con SIGNAR.

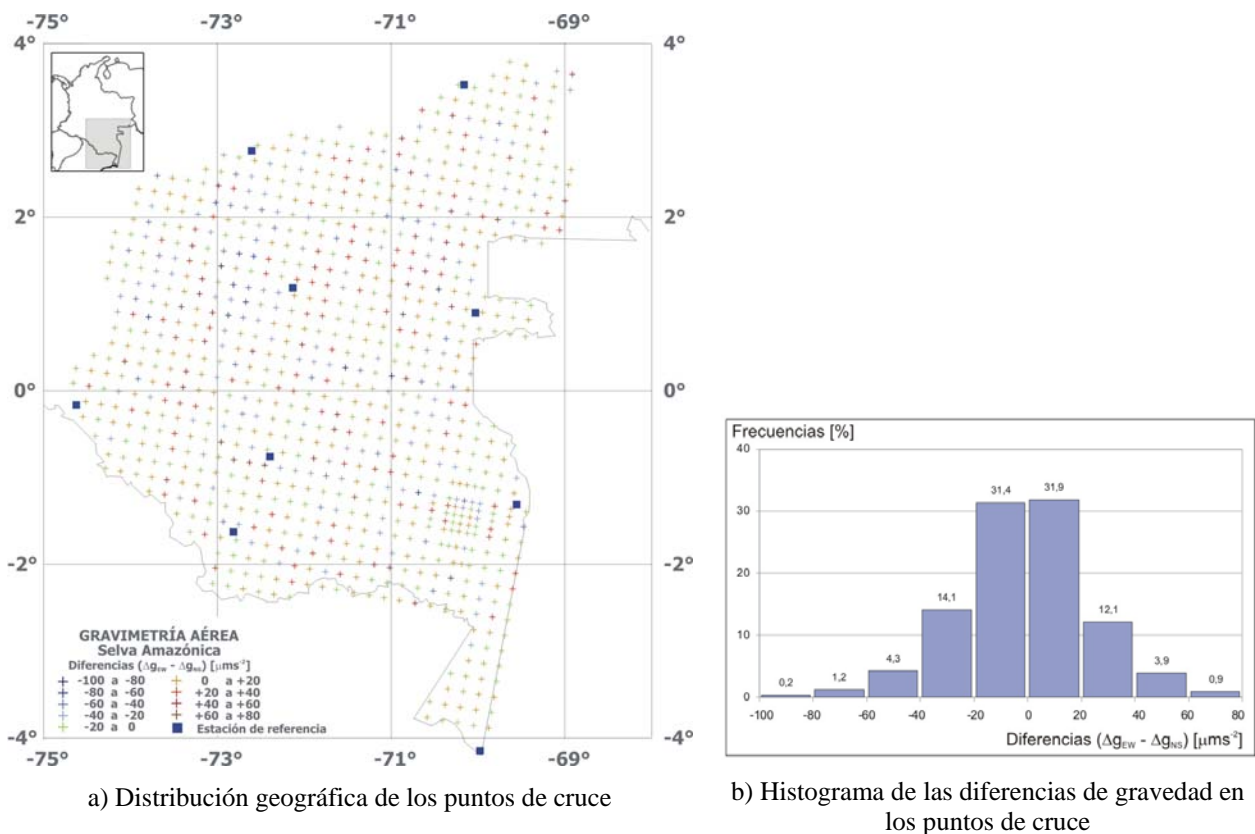


Figura 4.12 Puntos de cruce entre los perfiles aerogravimétricos medidos sobre el área selvática de Colombia

Posteriormente, en los puntos de cruce entre los perfiles en dirección este-oeste y norte-sur se calculan las diferencias de anomalía de Bouguer ($\Delta g_{EW} - \Delta g_{NS}$), éstas están entre $-92 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+79 \mu\text{ms}^{-2}$ (figura 4.12b). Dichas diferencias dependen de la precisión de la posición del avión (coordenadas horizontales y altura de vuelo), de la reducción de Eötvös, de la altura topográfica y de la medición de la aceleración de la gravedad, según lo muestran las siguientes precisiones: Dado que en el año de medición (1987) aún no funcionaba totalmente el sistema GPS, las

coordenadas horizontales de las líneas de vuelo debieron ser determinadas con TRANSIT (Navy Navigation Satellite System), cuya fiabilidad puede ser menor que ± 200 m. Igualmente, asumiendo que las medidas de velocidad y dirección de vuelo corresponden con los mejores estándares de la época, éstas tienen una precisión de $\pm 0,04$ ms⁻¹ y $\pm 0,03^\circ$, respectivamente; generando incertidumbres en la reducción de Eötvös en torno a $\pm 5 \mu\text{ms}^{-2}$. A lo anterior se adiciona la baja precisión de la determinación de la altura de vuelo ($\sim \pm 3$ m), la cual puede generar errores hasta de $\pm 10 \mu\text{ms}^{-2}$ en las anomalías Aire Libre. La acumulación de los errores descritos puede generar imprecisiones entre $\pm 50 \mu\text{ms}^{-2}$ y $100 \mu\text{ms}^{-2}$ en los valores finales de anomalía (Torge 1989, p. 289), los cuales, perfectamente, explican las magnitudes de las diferencias ($\Delta g_{\text{EW}} - \Delta g_{\text{NS}}$) obtenidas. No obstante, en la presente determinación del geoide para Colombia, se incluye el promedio de las anomalías calculado en cada uno de los puntos de cruce, dado que el error medio del promedio aritmético se reduce con la raíz cuadrada del número de observaciones, en este caso, dos.

4.3 Información de altimetría satelital

La posición geográfica de Colombia (con costas en el océano Pacífico y en el mar Caribe) requiere de la disponibilidad de información gravimétrica en las áreas marinas adyacentes, de modo que haya continuidad en la señal del campo de gravedad y que el geoide (o cuasigeoide) no presente errores de truncamiento en las áreas costeras. Por lo anterior, en este trabajo se incluyen las anomalías marinas de gravedad calculadas por Sandwell & Smith V.9.1 a partir de altimetría satelital (servidor ftp de *Scripps Institution of Oceanography*, California, http://topex.ucsd.edu/marine_grav/mar_grav.html). Éstas fueron obtenidas a partir de las misiones Geosat, TOPEX/Poseidon y ERS-1, siguiendo la metodología descrita en Sandwell and Smith (1997), con una resolución de $1' \times 1'$. Esta nueva versión introduce el EGM96 (n=m=360, Lemoine et al. 1998) como modelo de referencia, de modo que haya mayor compatibilidad entre las anomalías gravimétricas marinas y terrestres en la zona de transición al continente (líneas de costa). La resolución de la señal gravimétrica contenida en los nuevos valores es de ~ 18 km y su desviación, con respecto a cruceros geofísicos, es de aproximadamente $\pm 42 \mu\text{ms}^{-2}$ (Sandwell and Smith 1997).

Las principales ventajas de las anomalías gravimétricas provenientes de la altimetría satelital radican en su distribución regular (homogénea) con una precisión relativamente alta y su libre disposición para los diferentes usuarios. Entre las desventajas, se encuentra la fuerte influencia, en las anomalías de la gravedad, de las variaciones de la superficie del mar y el inevitable crecimiento de los errores a medida que se aproxima a las áreas costeras. De allí, en la determinación de modelos geoidales con estos datos, también se incluyen controles externos a partir de información gravimétrica terrestre, aérea y marina (proveniente de cruceros geofísicos), los cuales permiten reducir los errores sistemáticos (SSTop, o mareas no modeladas) contenidos en las anomalías derivadas de esta técnica (ver p. ej. Olesen et al. 2002, Fernandes et al. 2000, Andersen and Knudsen 2000, Hipkin 2000).

El presente trabajo se ocupa de la determinación de un modelo geoidal para el área continental de Colombia, así que sólo se incluirán las anomalías gravimétricas de la altimetría satelital sin profundizar en su análisis o combinación con datos sobre zonas marinas provenientes de otras fuentes. La combinación de estas anomalías con las obtenidas a partir de datos terrestres se discute en la sección [5.1].

4.4 Modelos globales de gravedad

El potencial de atracción gravitacional terrestre V se representa, en general, mediante su expansión en funciones armónicas esféricas, las cuales constituyen una solución de la ecuación de Laplace $\Delta V=0$. Los coeficientes (C_{nm}, S_{nm}) , parámetros de los modelos de gravedad, permiten derivar las diferentes funciones asociadas a la gravedad terrestre (alturas geoidales, anomalías de la gravedad, desviaciones de la vertical, alturas anómalas) mediante su relación con el potencial anómalo o de perturbación T [tabla 3.1]. El desarrollo en series esféricas de T , en función de las coordenadas (r, θ, λ) corresponde con (ver p. ej. Heiskanen and Moritz 1967, Rapp 1898, Pavlis 1997, Torge 2001):

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (4.14)$$

donde GM es la constante gravitacional geocéntrica y \bar{P}_{nm} son las funciones normalizadas de Legendre. $\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm}$ indican la diferencia entre los coeficientes normalizados del potencial de gravedad real W y el potencial normal U , el cual se expresa completamente a través de los armónicos zonales pares C_{no} ($n = 2, 4, \dots \sim 10$). La serie se inicia en el grado $n = 2$, ya que el elipsoide de referencia tiene la misma masa terrestre y su centro de masas coincide con el de la Tierra. La expansión en series esféricas de las demás funciones del campo de gravedad [tabla 3.1] se explican, por ejemplo, en Wenzel (1985, capítulo 2.2).

Los modelos globales de gravedad de grado bajo se calculan, principalmente, a partir del análisis de órbitas satelitales; su combinación con datos terrestres de gravedad (aéreos, marinos y continentales) y datos de altimetría satelital (anomalías de gravedad o alturas geoidales) permiten la obtención de modelos con mayor resolución (grados altos). Su determinación se lleva a cabo mediante una compensación por mínimos cuadrados o un cálculo de integración numérica. En el primer caso, se toman todos los observables disponibles del campo de gravedad, se combinan en un modelo matemático y, mediante un ajuste, se determinan los coeficientes C_{nm}, S_{nm} hasta ciertos grado n y orden m . En el segundo caso, se toman como base las relaciones de ortogonalidad de las funciones esféricas, las cuales requieren del análisis de un único parámetro del campo de gravedad (normalmente, anomalías gravimétricas), de allí, es necesario que las otras cantidades (p. ej. alturas geoidales derivadas de altimetría satelital) se expresen en términos del mismo parámetro (p. ej. anomalías medias). Moritz and Heiskanen (1967), Wenzel (1985), Rapp (1997b), Pavlis (1997), entre otros, presentan discusiones detalladas sobre los procedimientos mencionados.

Los valores del grado n y del orden m de la expansión en serie dependen de las observaciones disponibles y de su distribución (resolución espacial). Normalmente, se prefieren conjuntos de datos homogéneos, por tanto, se definen mallas con valores medios (p. ej. $1^\circ \times 1^\circ$ o $30' \times 30'$) de anomalías gravimétricas o alturas geoidales. Los compartimentos vacíos son complementados con modelos de gravedad de órdenes bajos o con interpolaciones *topográfico isostáticas*. Torge (2001, p 274 ff) presenta un resumen de las principales características de los modelos globales más conocidos.

Los modelos globales de gravedad son de especial importancia en las determinaciones locales del geoide (o del cuasigeoide), ya que permiten la definición y realización de un sistema de referencia vertical único a nivel mundial. No obstante, su principal desventaja, proviene de la inclusión de anomalías terrestres de gravedad, cuyos valores implícitamente reflejan las

inconsistencias de los datum verticales locales (nivel medio del mar determinado a partir de registros mareográficos). Un ejemplo, es el modelo EGM96 (Leomine et al. 1998), éste contiene anomalías continentales medias 30' x 30', cuyos niveles verticales se refieren a datum diferentes y sus precisiones varían entre $\pm 50 \mu\text{ms}^{-2}$ y $\pm 200 \mu\text{ms}^{-2}$.

Con el propósito de evitar posibles errores sistemáticos provenientes de anomalías terrestres no homogéneas verticalmente, en el presente cálculo geoidal se tienen en cuenta aquellos modelos globales de gravedad que han sido calculados sólo a partir del análisis de órbitas satelitales (*satellite-only*) o mediante la combinación de ecuaciones normales provenientes, tanto de anomalías gravimétricas superficiales (provenientes de altimetría satelital o datos terrestres), como de análisis orbitales. En el primer caso, se considera el modelo EIGEN-2 (*CHAMP-only Earth Gravity Field Model*; Reigber, et al. 2003) y en el segundo, el modelo TEG-4 Cp (*Texas Earth Gravity 4*; Tapley et al., 2001). Paralelamente, se incluye también el EGM96, de modo que se facilite el análisis de las diferencias correspondientes. La tabla 4.5 presenta las principales características de los modelos mencionados (DGFI 2001/2002).

Tabla 4.5 Parámetros principales de los modelos globales de gravedad EGM96, TEG-4 y EIGEN-2 (tomado de DGFI 2001/2002)

Parámetro	EGM96	TEG-4	EIGEN-2
Autor	NASA/NIMA/OSU	CRS – U. Texas	GFZ
Año	07/1998	12/2001	01/2003
Tipo de modelo	sat + alt + terr	sat (+ CHAMP)	CHAMP-only
Descripción	Lemoine, et al. 1998	Tapley, et al. 2001	Reigber, et al. 2003
Grado y orden máximos	360	200	140*
GM [$10^9 \text{m}^3 \text{s}^{-2}$]	398 600, 4415	398 600, 4415	398 600, 4415
a [m]	6 378 136,3	6 378 136,3	6 378 136,46
Sistema de mareas	<i>tide - free</i>	<i>zero - tide</i>	<i>tide - free</i>
Época	1986.0	1986.0	1997.0
dC ₂₀ /dt [$10^{-11}/\text{a}$]	+1,162 755 34	+1,162 755	+0,729 405
dC ₂₁ /dt [$10^{-11}/\text{a}$]	-0,32	-0,337	
dS ₂₁ /dt [$10^{-11}/\text{a}$]	+1,62	+1,606	

* Grado máximo para algunos órdenes (términos de resonancia)

Los anomalías gravimétricas calculadas a partir de los datos descritos en [4.1] y [4.2] se comparan con las anomalías provenientes de los modelos globales de gravedad Δg_{GGM} (ecuaciones (4.14) y (3.4)), para identificar posibles inconsistencias sistemáticas en el nivel vertical de los datos terrestres. Para el efecto, los coeficientes armónicos de cada modelo se reducen a la época 2000.0 (tabla 4.5) y el modelo TEG-4 se transforma al sistema de mareas *tide-free* (Tapley et al. 2001). Los datos locales se convierten en anomalías Aire Libre Δg_{FL} y anomalías de Faye Δg_{Faye} (anomalía Aire Libre + reducción topográfica, [sección 5.1]), condierando el efecto gravitacional de la atmósfera y el término *zero-tide*, de modo que sean consecuentes con las anomalías de los modelos globales. La compración se hace para estructuras con una resolución de ~ 300 km de longitud de onda, dados los valores bajos de *n* de los modelos globales, especialmente EIGEN-2. El elipsoide de nivel corresponde con el GRS80.

La primera etapa de este procedimiento se ocupa de revisar la consistencia de los diferentes modelos en el área colombiana. La tabla 4.6 muestra las diferencias entre las anomalías gravimétricas derivadas de los tres modelos considerados. En general, el nivel absoluto (promedio de las diferencias) es consistente entre ellos; sin embargo, el modelo EIGEN-2

presenta desviaciones muy altas ($\sim \pm 293 \mu\text{ms}^{-2}$) con respecto a los otros dos, su representación gráfica (figura 4.13) indica una fuerte tendencia en dirección norte-sur, la cual no es evidente en las diferencias ($\pm 70 \mu\text{ms}^{-2}$) entre TEG-4 y EGM96 [Anexo C].

Tabla 4.6 Diferencias entre las anomalías de los modelos globales de gravedad en Colombia

	TEG-4 menos EGM96	TEG-4 menos EIGEN-2	EGM96 menos EIGEN-2
Máximo [μms^{-2}]	+70,90	+265,10	+294,70
Mínimo [μms^{-2}]	-72,70	-293,10	-293,50
Promedio [μms^{-2}]	-1,16	-3,94	-2,78
Desviación estándar [μms^{-2}]	$\pm 38,78$	$\pm 138,96$	$\pm 151,34$

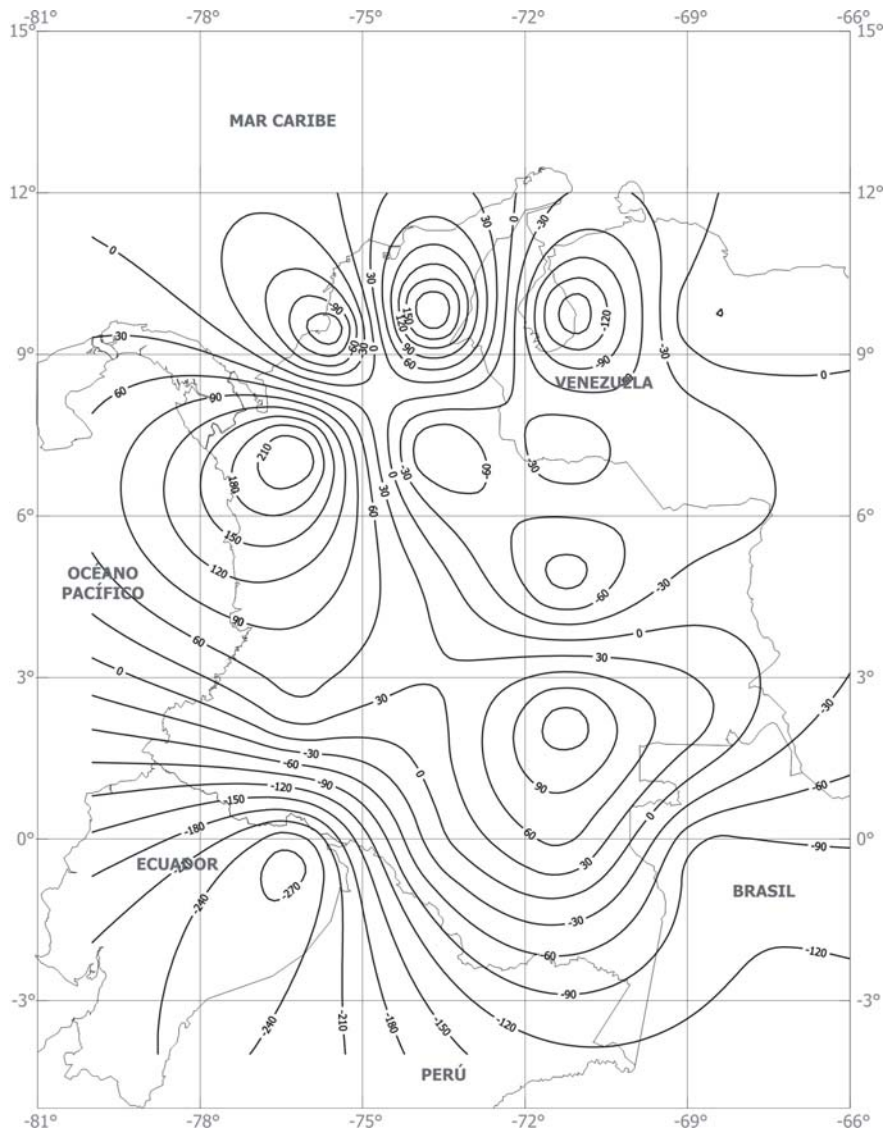


Figura 4.13 Diferencias entre las anomalías medias ($2,5^\circ \times 2,5^\circ$) de los modelos globales de gravedad TEG-4 y EIGEN-2 [μms^{-2}]

De acuerdo con Bosch (2003), en la evaluación de estos modelos también se consideran las componentes norte-sur y este-oeste de la deflexión de la vertical [sección 3.1], para lo cual, éstas se representan en formato raster a una resolución de 15'x15'. Las desviaciones de la vertical derivadas de EIGEN-2 (figura 4.14a) muestran una fuerte dependencia de la órbita satelital, que definitivamente desmejora el modelo de gravedad calculado e indica que los datos hasta ahora disponibles de CHAMP no son suficientes para determinar una representación homogénea del campo de gravedad terrestre. De otra parte, las deflexiones calculadas a partir de TEG-4 (figura 4.15b) presentan un contenido alto del efecto Gibbs (valores extremos de las funciones modeladas en los puntos de discontinuidad), el cual proviene de la imposibilidad de representar variaciones extremas de gravedad en distancias cortas, ya que el máximo grado de TEG-4 es $n = 200$.

Las diferencias entre las anomalías Aire Libre locales y las globales siguen patrones similares a los dibujados por las deflexiones de la vertical; por ejemplo, para el modelo EIGEN-2 se hace nuevamente evidente la alta influencia de la órbita satelital en las cantidades gravimétricas derivadas [ver representación gráfica en el Anexo C]. Mientras que, en la comparación con el modelo TEG-4 (figura 4.15a), la curva de diferencia cero describe una orientación este-oeste a la altura de $\phi = 4^\circ\text{N}$, encontrándose hacia el norte las diferencias negativas y al sur las positivas. En general, el promedio de las diferencias obtenidas (tabla 4.7) tienden a indicar que las anomalías locales están a un nivel más bajo que las globales.

Tabla 4.7 Diferencias entre las anomalías gravimétricas locales y las obtenidas de los modelos globales de gravedad

	EGM96		TEG-4		EIGEN-2	
	$\Delta g_{AL} - \Delta g_{GGM}$	$\Delta g_{Faye} - \Delta g_{GGM}$	$\Delta g_{AL} - \Delta g_{GGM}$	$\Delta g_{Faye} - \Delta g_{GGM}$	$\Delta g_{AL} - \Delta g_{GGM}$	$\Delta g_{Faye} - \Delta g_{GGM}$
Máximo [μms^{-2}]	+196,60	+213,20	+229,20	+251,70	+279,90	+351,80
Mínimo [μms^{-2}]	-326,94	-29,10	-332,14	-17,20	-439,24	-269,00
Promedio [μms^{-2}]	-35,86	+92,95	-37,47	+94,11	-9,83	+90,17
Desviación estándar [μms^{-2}]	$\pm 163,25$	$\pm 71,96$	$\pm 165,46$	$\pm 83,53$	$\pm 194,10$	$\pm 169,06$

La comparación de las anomalías globales con las locales de Faye muestra amplitudes de variación menores que con las anomalías Aire Libre (figura 4.15b, y otras en el Anexo C), de hecho, su desviación estándar en los modelos TEG-4 y EGM96 se reduce a la mitad (tabla 4.7). Dicha situación es comprensible dado que, primero, el parámetro primario a ser derivado de los modelos globales de gravedad son las alturas anómalas y, segundo, las anomalías de Faye son las que mejor satisfacen las condiciones de frontera (tabla 3.1) en el problema de Molodenski (Moritz 1980b, p. 419). Este tipo de anomalías incluyen, tanto la reducción Aire Libre, como la de terreno, que es la que se encarga de corregir el efecto negativo (atracción gravitacional hacia arriba) de las masas topográficas que se encuentran sobre el nivel del punto de medida, de esta forma, dichas anomalías contienen el efecto gravitacional total de la topografía, el cual también está incluido en las mediciones satelitales. Es decir, que la determinación de modelos geoidales

(o cuasigeoidales) a partir de la combinación de modelos globales de gravedad con anomalías terrestres en es más precisa si se utilizan anomalías de Faye.

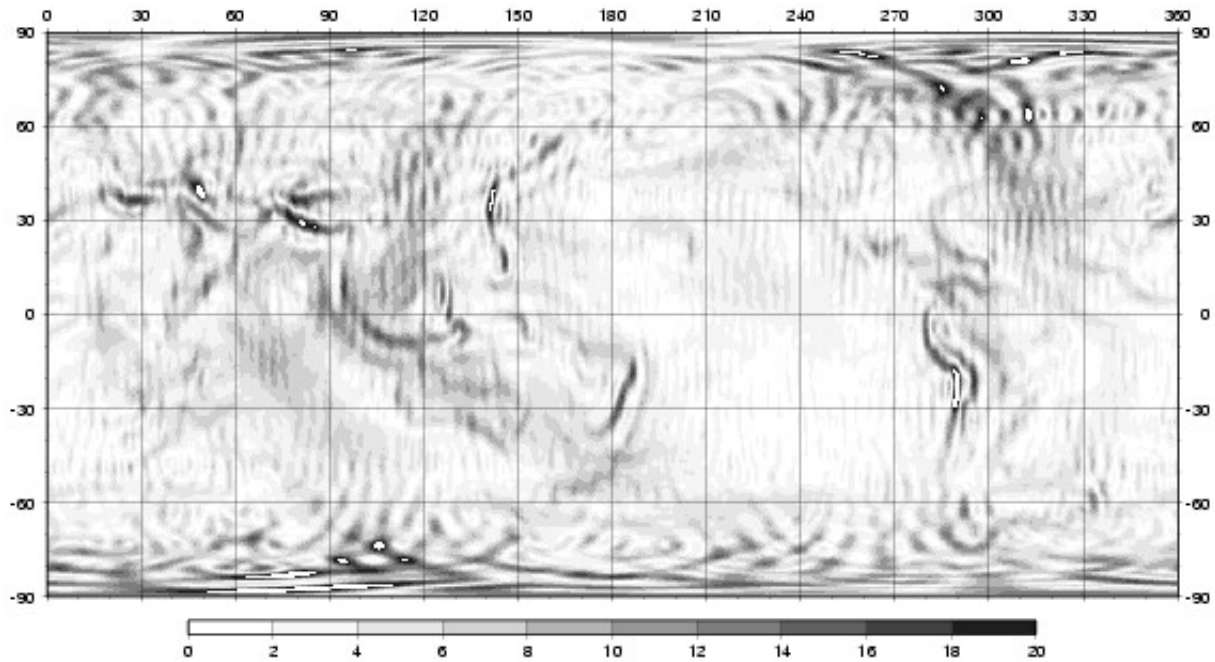


Figura 4.14a Desviaciones de la vertical del modelo EIGEN-2 [“]
(proporcionado por Wolfgang Bosch, DGFI, Múnich)

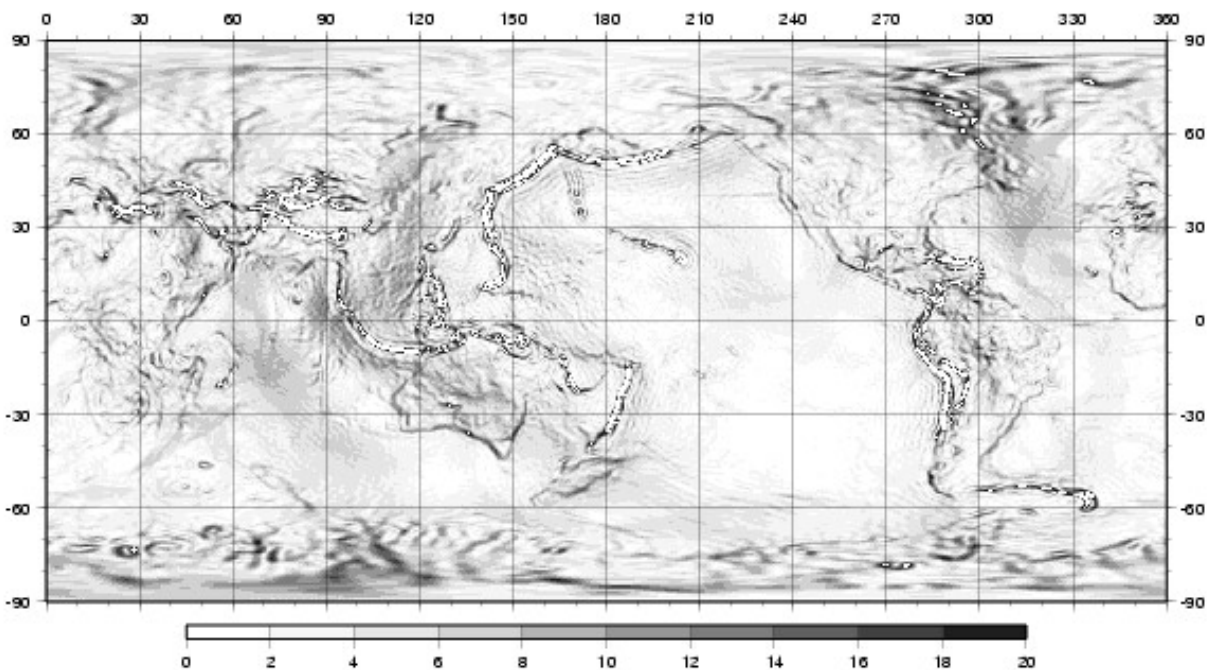


Figura 4.14b Desviaciones de la vertical del modelo TEG-4 [“]
(proporcionado por Wolfgang Bosch, DGFI, Múnich)

Considerando que la reducción topográfica es positiva, el nivel (valor promedio) de las anomalías locales siempre tenderá a estar por encima del nivel de las globales. De hecho, en las

diferencias calculadas con respecto a los tres modelos analizados, se observa un valor en torno a $\sim +90 \mu\text{ms}^{-2}$, el cual corresponde con la magnitud esperada de las inconsistencias generadas por el uso de diversos datum verticales e hipótesis de densidad de masas en la reducción topográfica. Por ejemplo, un error del 3% en la densidad utilizada (v.g. 2750 en lugar de 2670 kg m^{-3}) genera, para las mayores reducciones topográficas alcanzadas en Colombia ($>1000 \mu\text{ms}^{-2}$) [Sección 5.2], una inconsistencia equivalente a la tercera parte del valor promedio mencionado. Adicionalmente, en las áreas montañosas, las reducciones gravimétricas consideran masas virtuales que *rellenan* los valles, haciendo que los valores de anomalía de Faye aún sean mayores. Esta influencia sistemática es evidente al comparar estas anomalías con las derivadas de los modelos globales de gravedad; no obstante, no afecta la determinación del geode (o cuasigeode), ya que la técnica *Remove/Restore* permite su control.

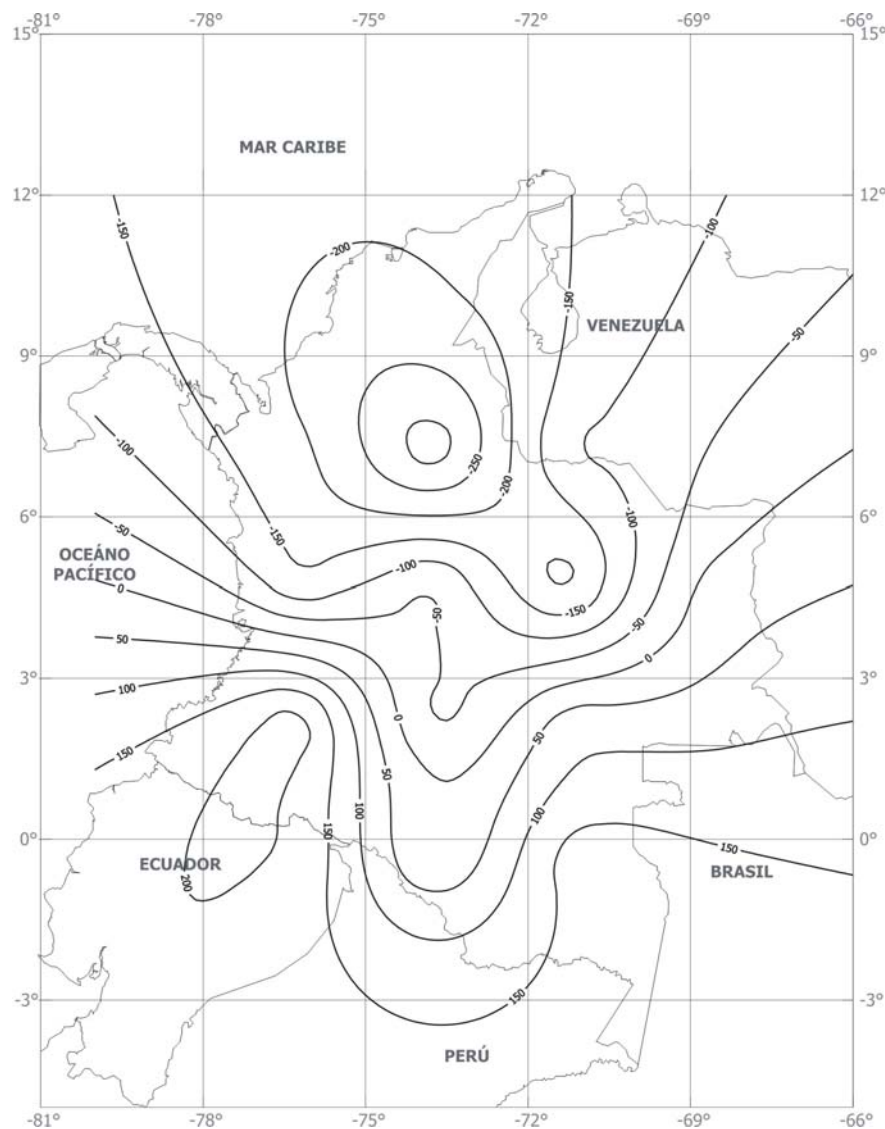


Figura 4.15a Diferencias entre las anomalías Aire Libre locales y las derivadas el modelo TEG-4 [μms^{-2}]

La discusión previa permite concluir que, la identificación de errores sistemáticos en los datos terrestres requiere de una resolución mayor de los modelos satelitales y que, los resultados de las comparaciones no son suficientes para justificar un cambio en el nivel de las anomalías locales. En cuanto a la selección de uno de los tres modelos como componente global del geode (o

cuasigeoide) en Colombia, se descarta el uso del modelo EIGEN-2 dada su alta correlación con la órbita satelital y, se prefiere el modelo TEG-4 al EGM96, ya que, a pesar de que las diferencias entre los valores de anomalía global y los locales son equivalentes, la distribución geográfica de dichas diferencias es más homogénea al considerar este modelo [Anexo C].

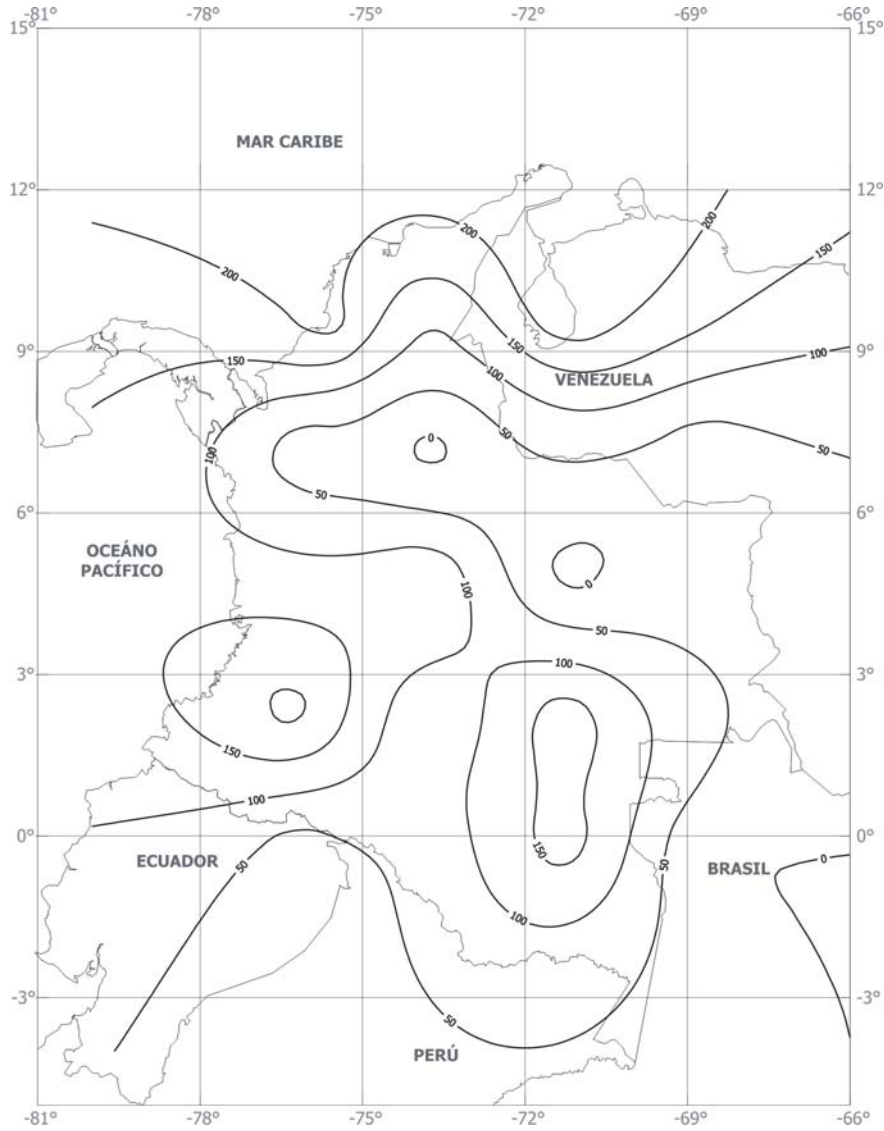


Figura 4.15b Diferencias entre las anomalías locales de Faye y las derivadas del modelo TEG-4 [μms^{-2}]

5 Anomalías de gravedad y efectos topográficos

La solución del problema del valor límite se apoya en la disponibilidad de anomalías gravimétricas sobre la superficie de frontera; es decir, la superficie terrestre, según la Teoría de Molodenski (ecuación 3.11 ó 3.15) o, el geoide, según la Teoría de Stokes (ecuación 3.7):

$$\text{Molodenski:} \quad \Delta g = g \Big|_{\text{sup terrestre}} - \gamma \Big|_{\text{teluroide}} \quad (5.1)$$

$$\text{Stokes:} \quad \Delta g_0 = g_0 \Big|_{\text{geoide}} - \gamma_0 \Big|_{\text{elipsoide}} \quad (5.2)$$

En el planteamiento de Stokes, las mediciones de gravedad realizadas sobre la superficie terrestre deben reducirse hasta el geoide (superficie de frontera). Dichas reducciones incluyen, tanto el efecto del cambio de posición del punto de observación desde la superficie terrestre hasta el geoide (reducción aire libre), como la influencia gravitacional de las masas que se encuentran por encima del nivel medio del mar (reducción de las masas topográficas) y de las internas no visibles (reducción isostática) (Magnizki et al. 1964, Heiskanen and Moritz 1967).

La reducción aire libre se define rigurosamente a través del gradiente del campo de gravedad terrestre verdadero ($\partial g/\partial H$); no obstante, dado que dicho gradiente depende de la distribución de masas que subyacen el punto de observación, éste no es ni observable, ni estimable y, por tanto, convencionalmente, se sustituye con el gradiente vertical del campo normal de gravedad ($\partial \gamma/\partial H$).

El efecto de las masas topográficas se descuenta en dos etapas: la primera considera una placa esférica (reducción de Bouguer), cuyo espesor equivale a la altura sobre el nivel medio del mar del punto de observación y, la segunda, se refiere a aquellos excesos o déficits de masas no considerados por la placa de Bouguer (reducción por terreno). En ambos casos, la estimación de la influencia gravitacional correspondiente requiere de la formulación de hipótesis sobre la distribución interna (densidad) de las masas topográficas. La reducción isostática se apoya en el modelamiento de la corteza terrestre, especialmente, en su relación con el manto superior, lo que requiere, igualmente, de la introducción de alguna hipótesis que describa su equilibrio isostático (p. ej. Pratt-Hayford, Airy-Heiskanen, Vening Meinesz) (Heiskanen and Vening Meinesz 1958). En consecuencia, tanto la reducción de las masas topográficas, como de las isostáticas, conducen a diferentes valores de anomalía sobre el geoide (Δg_0), si las hipótesis iniciales para su estimación cambian.

En la Teoría de Molodenski, las anomalías gravimétricas se calculan sobre la superficie terrestre (Δg), de allí, la gravedad normal es trasladada desde el elipsoide de nivel γ_0 hasta el teluroide γ (figura 3.1). Dado que, tanto la gravedad normal, como su gradiente ($\partial \gamma/\partial H$), se definen analíticamente y por tanto, son conocidos, la determinación de dichas anomalías no requiere de la formulación de hipótesis asociadas a la distribución interna de las masas terrestres. Estas anomalías también se denominan *Aire Libre*, pero para evitar confusiones con las descritas anteriormente (según Stokes), en adelante se llamarán *anomalías de Molodenski*.

De acuerdo con lo anterior, y teniendo presente que el conocimiento sobre las densidades de las masas topográficas en Colombia es deficiente, dada su compleja estructura geológica y tectónica, en el desarrollo de este trabajo, se opta por calcular en primera instancia, el cuasigeoide y después, según la ecuación (3.16), el geoide.

5.1 Determinación de mallas homogéneas de información gravimétrica

5.1.1 Anomalías (terrestres) de Molodenski

La evaluación numérica de la Integral de Stokes (3.15) corresponde con la suma ponderada de los valores medios de las anomalías de Molodenski (Δg) distribuidos sobre compartimentos regulares (mallas o *grids*). Normalmente, estas mallas se construyen en función de las coordenadas elipsoidales (B, L), que en aproximación esférica pueden ser reemplazadas por las coordenadas (φ, λ). La función superficial de anomalía $\Delta g = \Delta g(\varphi, \lambda)$ se obtiene a partir de la interpolación (o predicción) de las observaciones gravimétricas realizadas punto a punto sobre la superficie terrestre. Dicha interpolación no se hace directamente con las anomalías de Molodenski (5.3), en tanto que éstas dependen fuertemente de la topografía y, en zonas montañosas, como la mayoría del territorio colombiano, pueden conducir a inconsistencias en las áreas con cambios fuertes de relieve. Para el efecto, se utiliza la anomalía simple de Bouguer (sin corrección por terreno), la cual presenta un comportamiento más suave y, en alta medida, independiente de los rasgos topográficos (Torge 2001, p. 266). Vale la pena anotar que, las anomalías de Bouguer en este caso son utilizadas exclusivamente para la interpolación de las mallas; una vez éstas se han calculado, el efecto descontado de la placa se adiciona nuevamente.

La figura 5.1 muestra las funciones de covarianza correspondientes a las anomalías de Molodenski y de Bouguer en la interpolación de un punto según las ecuaciones (4.10) ... (4.12). La distribución de las covarianzas empíricas indica que las anomalías de Bouguer presentan un comportamiento más suave que el de las de Molodenski, facilitándose, por tanto, su interpolación. De hecho, el error de predicción (4.13) de las anomalías de Bouguer ($\pm 12,5 \mu\text{ms}^{-2}$) es 20 veces menor que el de las anomalías de Molodenski ($\pm 263,9 \mu\text{ms}^{-2}$).

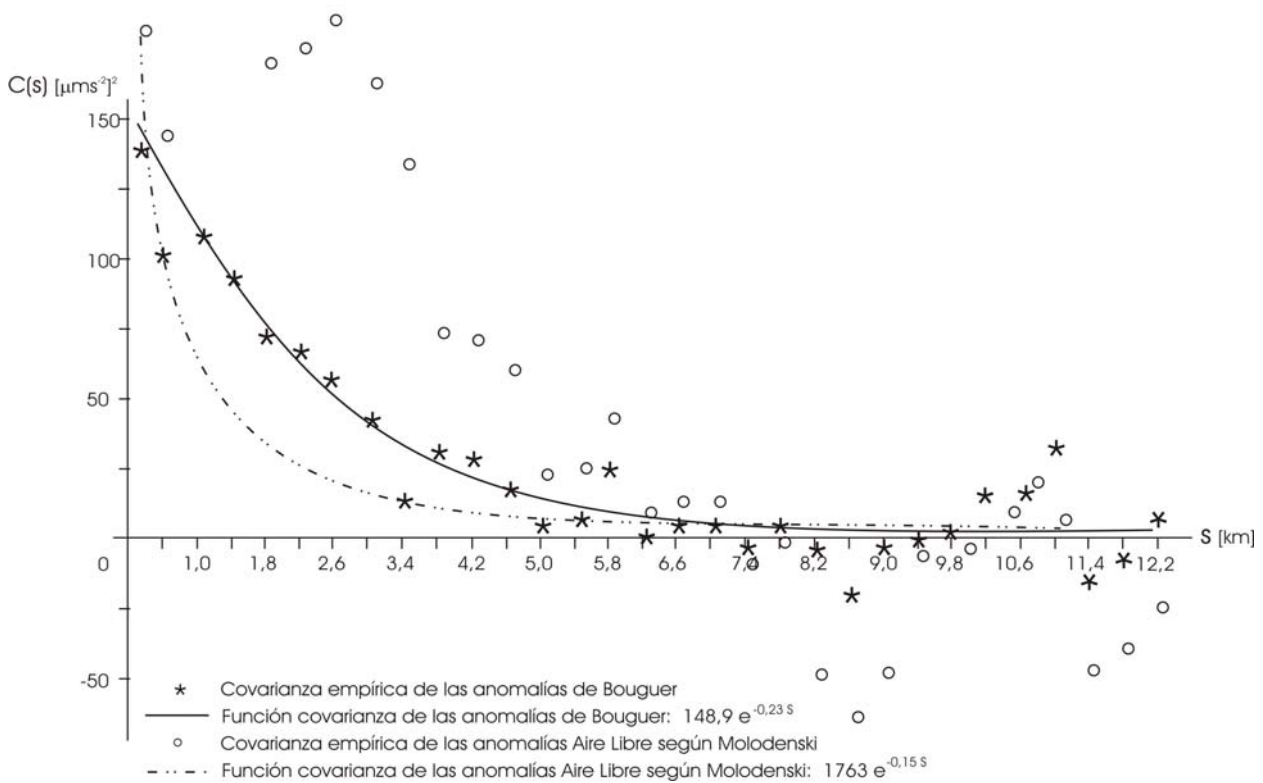


Figura 5.1 Funciones de covarianza generadas a partir de la interpolación de anomalías simples de Bouguer y de Molodenski

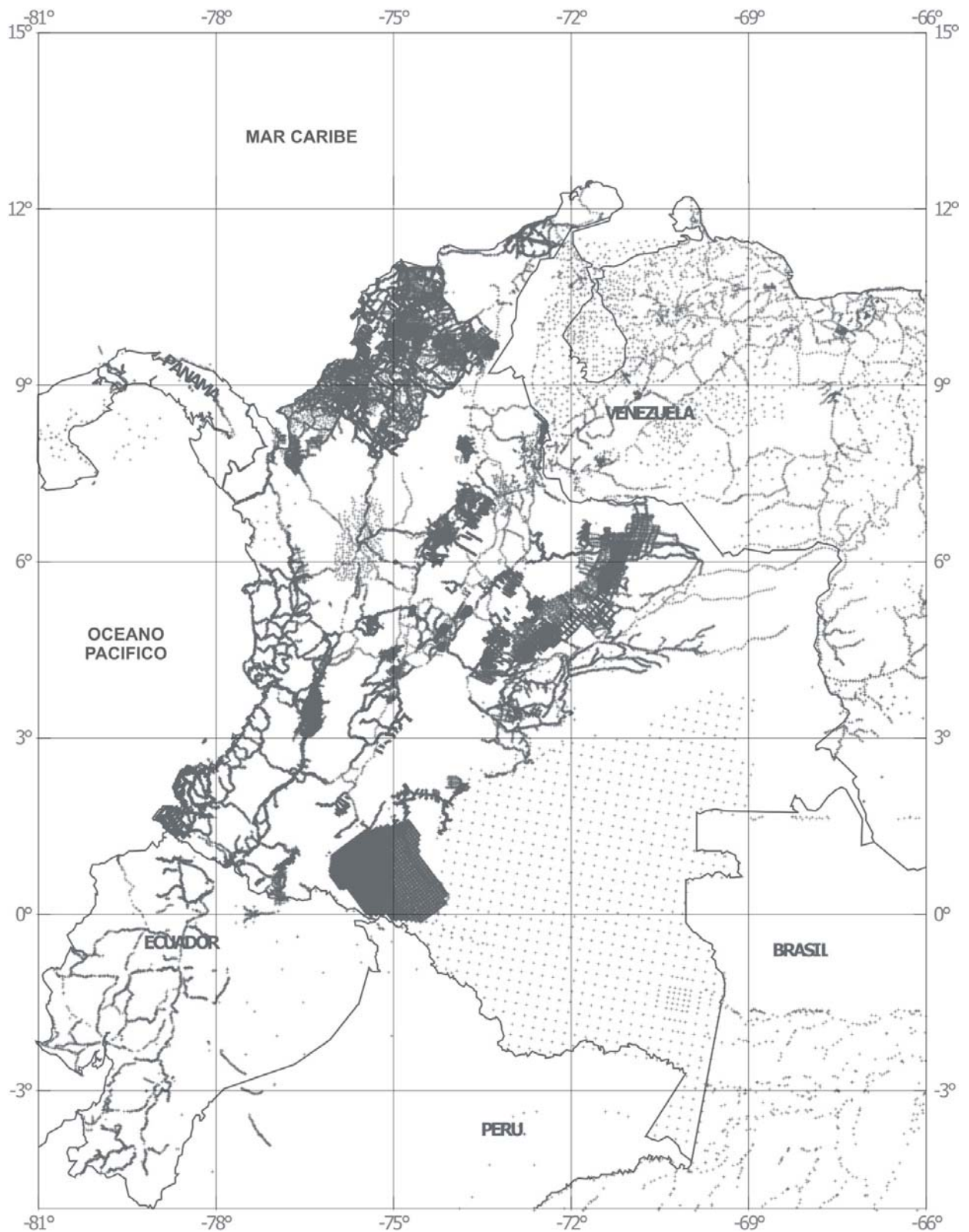


Figura 5.2 Datos locales de gravedad disponibles

La interpolación de las anomalías gravimétricas de Molodenski en la parte continental de Colombia se realiza utilizando los datos descritos en [4.1] y [4.2], complementados en las zonas fronterizas de los países vecinos con información proveniente del NGI (National Geospacial-

Intelligence Agency) y del BGI (Bureau Gravimétrique International) (figura 5.2). Ésto minimiza la ocurrencia de errores por truncamiento de la señal gravimétrica dentro del área efectiva de cálculo, la cual se ha definido entre $[\varphi = 5^\circ \text{ S}, \lambda = 80^\circ \text{ W}]$ y $[\varphi = 15^\circ \text{ N}, \lambda = 66^\circ \text{ W}]$. De allí, se estiman valores medios de anomalía para la zona comprendida entre $[\varphi = 7^\circ \text{ S}, \lambda = 82^\circ \text{ W}]$ y $[\varphi = 17^\circ \text{ N}, \lambda = 64^\circ \text{ W}]$ a partir de los datos de gravedad disponibles entre $[\varphi = 10^\circ \text{ S}, \lambda = 85^\circ \text{ W}]$ y $[\varphi = 20^\circ \text{ N}, \lambda = 60^\circ \text{ W}]$. Aquellos lugares sin información terrestre (v.g. regiones selváticas en Ecuador, Perú y Brasil) son densificados con anomalías Aire Libre derivadas del modelo TEG-4 y convertidas a anomalías de Bouguer con apoyo de un modelo digital de terreno [Sección 5.2]. El procedimiento paso a paso corresponde con:

- Cálculo, punto a punto, de las anomalías Aire Libre según Molodenski (Heiskanen and Moritz 1967, p. 293):

$$\Delta g = g - \gamma_0 \left[1 - 2 \left(1 + m + f - 2 f \sin^2 \varphi \right) \frac{H^N}{a} + \left(\frac{H^N}{a} \right)^2 \right] \quad (5.3)$$

m, f, a son los parámetros del elipsoide GRS80 (Moritz 1980a), γ_0 es la gravedad normal sobre el elipsoide según la fórmula Somigliana, g es la aceleración de la gravedad medida sobre la superficie terrestre y H^N es la altura normal del punto de observación, la cual, en este caso, es reemplazada por la altura nivelada, dado que en Colombia aún no se han aplicado las reducciones por el efecto del campo de gravedad a los desniveles medidos.

- Cálculo del término de Honkasalo $\delta_{tide\ free}$, para transformar los datos terrestres del sistema de mareas *zero-tide*, al sistema *free tide* (Morelli et al 1974):

$$\delta_{tide\ free} = -0,37 \left(1 - 3 \sin^3 \varphi \right) \quad [\mu\text{ms}^{-2}] \quad (5.4)$$

Dicha transformación es necesaria, ya que la componente global del cuasigeoide, calculada a partir del modelo TEG-4, se encuentra en el sistema *tide-free*.

- Cálculo, punto a punto, de la anomalía simple de Bouguer:

$$\Delta g_B = \Delta g + \delta_B + \delta_{free\ tide} ; \quad \delta_B = 2 \pi G \rho H \approx 4,19 \times 10^{-4} \rho H \quad [\mu\text{ms}^{-2}] \quad (5.5)$$

siendo $\rho = 2670 \text{ kg m}^{-3}$. Como el efecto de la placa de Bouguer se adiciona nuevamente después de la interpolación, la hipótesis sobre la densidad de masas no afecta el cálculo del cuasigeoide.

- Interpolación, en una malla de $(1' \times 1')$, de los valores de anomalía simple de Bouguer según el procedimiento descrito por las ecuaciones (4.10) ... (4.12)
- Cálculo, en una malla de $(1' \times 1')$, de la reducción atmosférica (Torge 1989, p. 54):

$$\delta_A = 8,74 - 9,9 \times 10^{-5} H + 3,56 \times 10^{-9} H^2 \quad [\mu\text{ms}^{-2}] \quad (5.6)$$

donde H es la altura en metros del punto de cálculo sobre el nivel medio del mar. Esta reducción se aplica, dado que, tanto la fórmula Somigliana para la obtención de la gravedad normal, como las anomalías derivadas del modelo global de gravedad TEG-4, no contienen el efecto gravitacional de las masas atmosféricas. La determinación de esta

reducción se hace con ayuda del modelo digital de terreno [Sección 5.2] directamente sobre una malla, y no punto a punto, dado que las observaciones de la gravedad no están distribuidas homogéneamente y su determinación previa a la interpolación puede generar errores sistemáticos de órdenes considerables.

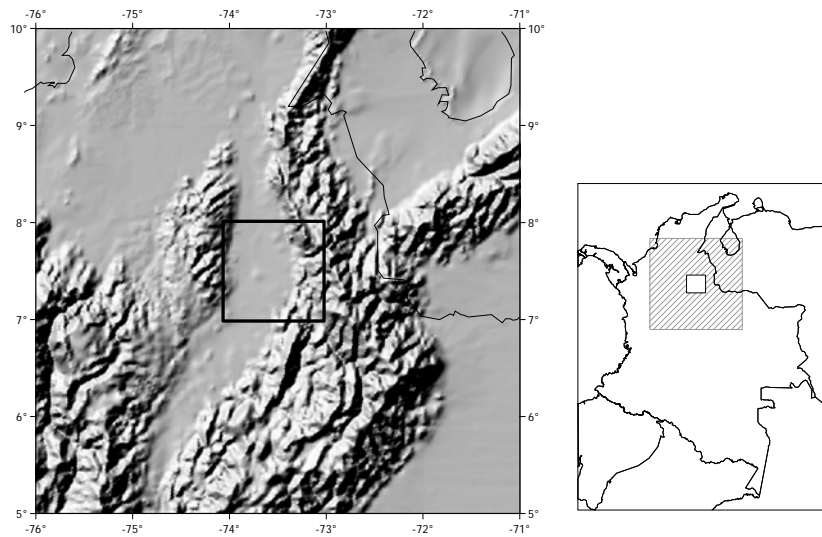
- Cálculo, en una malla de (1' x 1'), de la corrección por terreno (o relieve) δ_G [Sección 5.2], la cual al ser adicionada a la malla de anomalías simples de Bouguer interpoladas (5.5), da como resultado una malla (1' x 1') de anomalía Bouguer total.
- Determinación, a partir de la malla interpolada a (1' x 1'), de los valores medios de anomalía de Bouguer total en bloques de (2' x 2'). El promedio de los cuatro valores (1' x 1') correspondientes en cada bloque de (2' x 2') permite el control de errores groseros contenidos, tanto en las anomalías interpoladas, como en el modelo digital de terreno.
- Cuantificación, en una malla de (2' x 2'), de la reducción de la placa de Bouguer, la cual al ser reincorporada a los valores medios obtenidos en el ítem anterior, conduce a la obtención de las anomalías de Faye (2' x 2'). Estos valores son complementados en las áreas marinas adyacentes con las anomalías Aire Libre (2' x 2') derivadas de altimetría satelital.

Diferentes autores (entre otros, Denker and Torge 1998; Forsberg and Tscherning 1997; Forsberg 1997; Fotopoulos, et al. 1999; Smith and Roman 2001) prefieren aplicar la corrección por relieve antes de efectuar la interpolación de las anomalías gravimétricas (Bouguer total) en mallas regulares. Sin embargo, en el presente trabajo no se sigue este procedimiento, puesto que la distribución de los puntos gravimétricos disponibles no es homogénea y el efecto del relieve puede ser cuantificado en proporciones no representativas (en exceso o en defecto). Adicionalmente, Magnizki et al. (1964) señala que la corrección por relieve depende en forma tal de éste, que su interpolación se dificulta y no sigue los patrones reales de su comportamiento. A modo de confirmación, se describe el siguiente ejemplo:

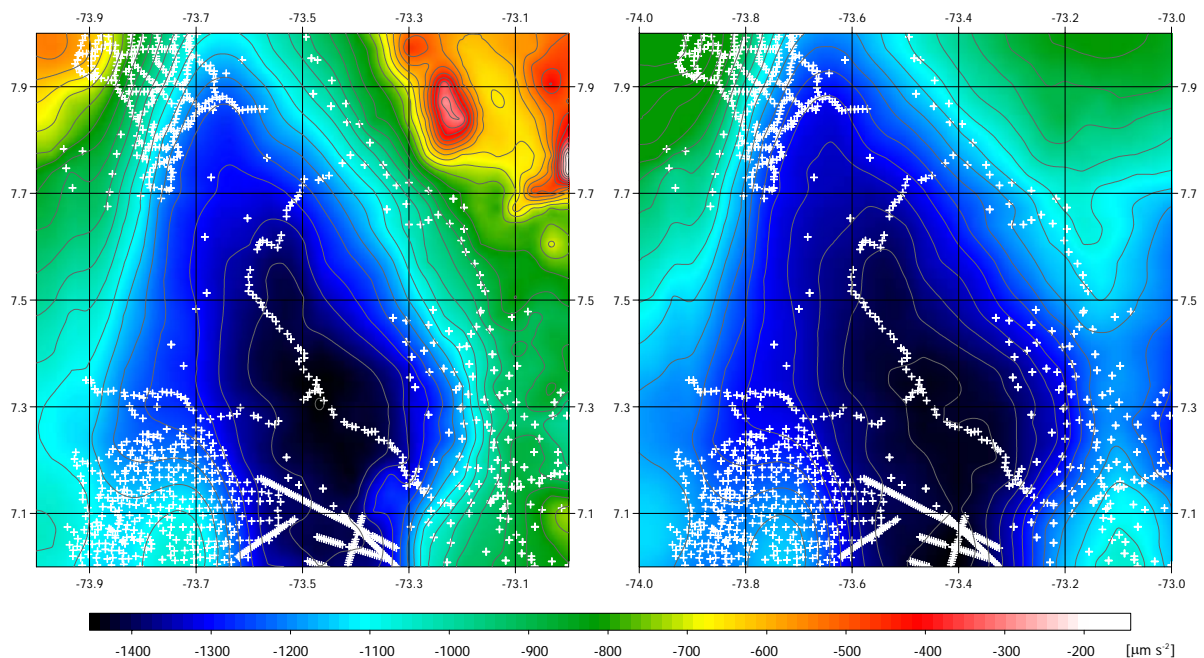
La figura 5.3a presenta el entorno topográfico de un bloque de (1° x 1°) [(7°N, 74°W), (8°N, 73°W)] que contiene 1245 puntos terrestres de gravedad, cuyos valores de anomalía de Bouguer total han sido interpolados en una malla de (2' x 2') (figura 5.3c). Éstos se han denominado *ABT II*. En contraste, a partir del modelo digital de terreno (figura 5.3a), se ha calculado la corrección por relieve en una malla de (1' x 1'), que ha sido adicionada a los valores de anomalía simple de Bouguer interpolados en una malla de dimensiones equivalentes, para obtener anomalías totales de Bouguer. Éstas se han dispuesto en bloques de (2' x 2') a partir del promedio de los cuatro valores de (1' x 1') que les corresponden (figura 5.3b) y se han denominado *ABT I*. El comportamiento de *ABT II* es mucho más suave que el de *ABT I* (ver desviación estándar en la tabla 5.1). En general, las mayores diferencias (*ABT I* – *ABT II*) se encuentran en las zonas con pendientes topográficas fuertes; de hecho, *ABT II* no representa el efecto de las áreas montañosas existentes en las esquinas nor-oeste y nor-este del cuadrángulo seleccionado, pues allí no existen puntos de gravedad disponibles y los gradientes resultantes de la predicción son muy bajos. La diferencia absoluta entre las anomalías medias derivadas por los dos métodos alcanza una magnitud de 51,4 μms^{-2} , la cual puede generar errores sistemáticos en las alturas anómalas (cuasigeoide) determinadas, por tal razón, se prefiere la metodología de *ABT I*. Dicha metodología ha sido utilizada ampliamente en la minimización del efecto *aliasing* en el cálculo de anomalías gravimétricas y modelos geoidales (Featherstone and Kirby 2000, Goos et al. 2001).

Tabla 5.1 Comparación de diferentes procedimientos para la obtención de valores de anomalía Bouguer total en una malla de (2' x 2')

Indicador estadístico	<i>ABT I</i>	<i>ABT II</i>	<i>ABT I</i> menos <i>ABT II</i>
Máximo [μms^{-2}]	-141,2	-490,1	+776,5
Mínimo [μms^{-2}]	-1453,3	-1410,9	-76,9
Promedio [μms^{-2}]	-1072,7	-1124,1	51,4
Desviación estándar [μms^{-2}]	$\pm 256,2$	$\pm 190,3$	$\pm 111,2$



a) Modelo digital de terreno



b) Valores medios (2' x 2') de anomalía de Bouguer total, derivados a partir de la interpolación de anomalías simples de Bouguer, adicionadas por la corrección de relieve calculada a partir del modelo digital de terreno.

c) Valores de anomalía de Bouguer total interpolados directamente a partir de los puntos gravimétricos en una malla de (2' x 2').

Figura 5.3 Comparación de diferentes procedimientos para la obtención de valores de anomalía Bouguer total en una malla de (2' x 2')

5.1.2 Combinación de anomalías gravimétricas terrestres con las provenientes de altimetría satelital

Los valores medios ($2' \times 2'$) de las anomalías de Faye (en la región continental del país) son complementadas en las áreas marinas adyacentes con valores medios ($2' \times 2'$) de anomalías Aire Libre derivadas de altimetría satelital (Sandwell and Smith 1997), de manera que se disponga de una distribución homogénea de información gravimétrica sobre la zona efectiva de cálculo del cuasigeoide. Amén que estos dos tipos de anomalías son consistentes (la corrección por relieve en el mar es cero), se presentan divergencias en las anomalías de aquellos compartimentos que coinciden en la línea de costa (figura 5.4).

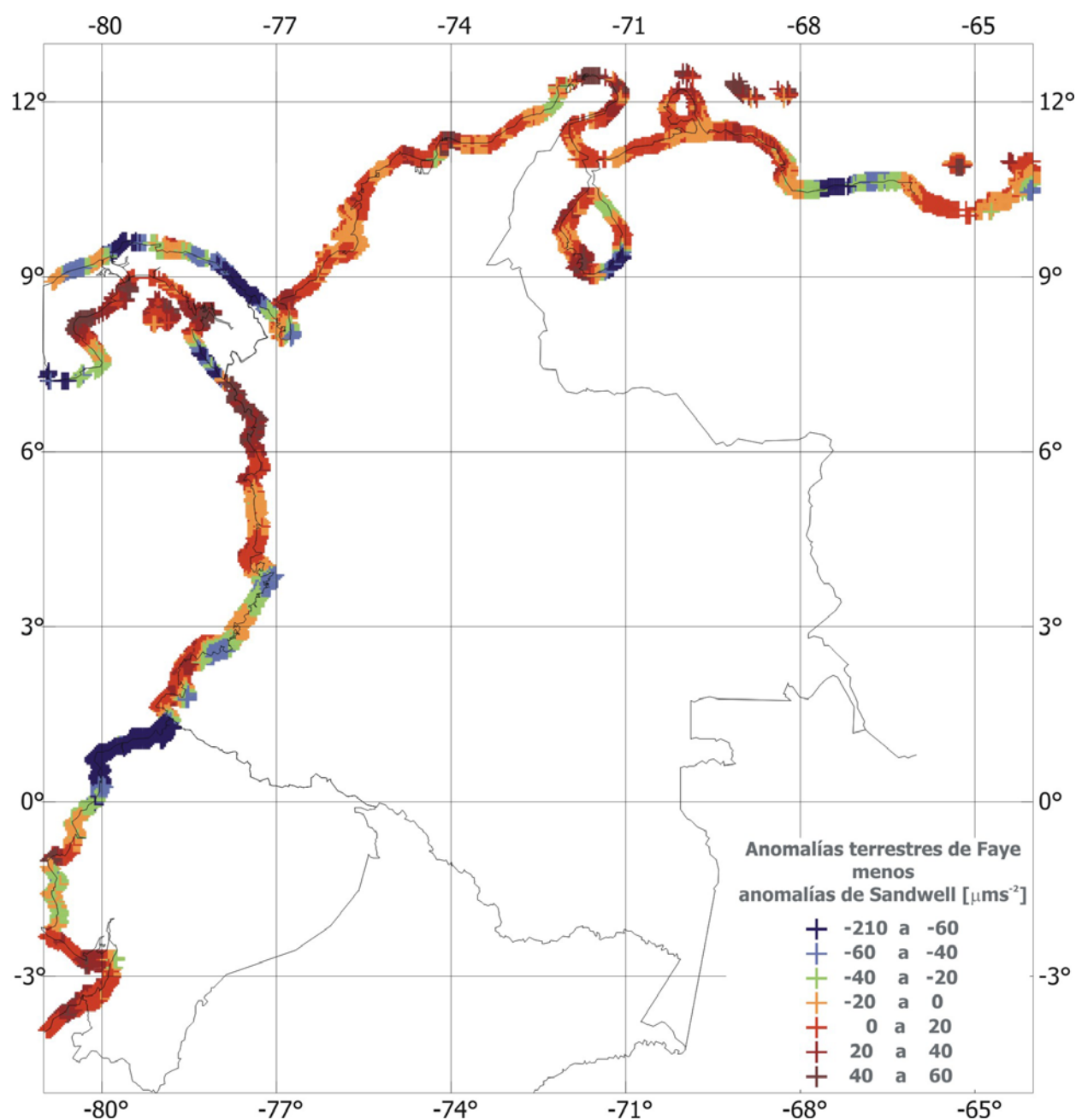


Figura 5.4 Comparación de las anomalías gravimétricas terrestres con las derivadas de altimetría satelital sobre la línea de costa

Las diferencias entre las anomalías terrestres y las marinas, justo en los bloques correspondientes a la línea de costa, varían entre $-206,9 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+91,8 \mu\text{ms}^{-2}$, con una desviación estándar de $\pm 38,4 \mu\text{ms}^{-2}$ y un valor promedio de $-4,8 \mu\text{ms}^{-2}$. Las divergencias máximas están distribuidas en aquellas regiones donde la línea de costa presenta irregularidades fuertes (bahías, desembocaduras de ríos, etc.) y por tanto, los registros altimétricos tienen baja precisión, ó en aquellas donde el gradiente vertical de la topografía es muy alto (costa montañosa por la presencia de Los Andes) y la omisión de la reducción por relieve en las anomalías marinas se constituye en una fuente adicional de error. Dado que el objetivo principal de este trabajo es la determinación del cuasigeoide en el área continental de Colombia, no se adelantan mayores análisis sobre las anomalías marinas y, las divergencias descritas, se suavizan mediante la interpolación de los valores medios de anomalía para los bloques de ($2' \times 2'$) que se encuentran a lo largo de la línea de costa en una franja de 10 km de amplitud.

5.2 Término G_1 de Molodenski

El primer término de la relación matemática (3.15) corresponde a la Fórmula de Stokes (3.7), cuya evaluación, a través de anomalías gravimétricas calculadas sobre la superficie terrestre, permite obtener valores aproximados de las alturas anómalas. Dicha fórmula conduciría a resultados más precisos, si la aceleración de la gravedad se conociera sobre la totalidad de una superficie equipotencial externa a las masas terrestres, pero, la superficie de la Tierra, donde se realizan las mediciones de gravedad, está lejos de ser una equipotencial y, por tanto, el cálculo exacto del potencial anómalo requiere de algunas correcciones adicionales. La principal de éstas, está asociada a la influencia gravitacional de las masas topográficas y corresponde al término G_1 (3.15). Las demás (de órdenes superiores G_2, G_3, \dots) hacen referencia al efecto proveniente de la inclinación del terreno, el cual, hasta ahora, se considera nulo (Heiskanen and Moritz 1967, p. 303 ff). Asumiendo que la aceleración de la gravedad varía linealmente con la altura, el término G_1 de Molodenski equivale a la reducción por terreno δ_G (Sideris 1990); de allí, las anomalías de Faye son los valores límite más adecuados para solucionar el problema de valor de frontera de acuerdo con la Teoría de Molodenski.

Amod and Merry (2001) muestran que, en una determinación rigurosa, el término G_1 difiere efectivamente de la corrección por terreno δ_G , pues ésta siempre es positiva (G_1 puede ser también negativo) y sus magnitudes, en general, pueden ser menores que las de G_1 . No obstante, considerando que en el presente trabajo se utiliza el gradiente vertical normal para la determinación de las anomalías sobre la superficie terrestre y que, además, se utiliza la anomalía de Bouguer para la interpolación de las mallas, se ha generado una alta dependencia de los datos gravimétricos con respecto a la altura y por tanto, la sustitución de G_1 con δ_G es válida.

La corrección por terreno se calcula con el programa TC de GRAVSOFT (Tscerning et al. 1992), el cual se basa en la integración numérica de la influencia gravitacional de aquellas masas (o vacíos) que están sobre (o bajo) el nivel del punto de cálculo (Forsberg 1997, p. 166 ff). Para el efecto, se definen tres zonas de integración (figura 5.5), cuyos radio y tamaño de los bloques dependen de las densidad del modelo digital de terreno disponible. En este trabajo se utilizan los modelos GTOPO30 (*Land Processes Distributed Active Archive Center (LP DAAC), beim U.S. Geological Survey's EROS Data Center (<http://edcdaac.usgs.gov>)*) en las áreas continentales y Smith and Sandwell (1997) en las oceánicas.

La zona de integración externa A (figura 5.5) está compuesta por bloques de ($2' \times 2'$), la zona media B por bloques de ($30'' \times 30''$) y la zona interna C por valores de altura interpolados mediante el algoritmo *bicubic spline* (Forsberg 1997, p. 167). Los radios de integración R_A y R_C

equivalen a 999 km y $\sim 90''$, respectivamente; mientras que, el radio R_B se ha definido en 160 km. Dado que la mayor influencia gravitacional de la topografía sobre el punto de cálculo está contenida en la zona B, la magnitud de su radio de integración ha requerido de un análisis complementario fundamentado en la evaluación de tres escenarios topográficos diferentes, cuya influencia gravitacional se ha calculado para un radio de integración que varía entre 20 km y 240 km. Los resultados muestran que, en áreas planas, la corrección por terreno no varía después de los 60 km de distancia al punto de cálculo; mientras que, en las zonas con pendientes topográficas medias y altas, dicha corrección presenta aportes considerables hasta los 160 km de distancia. Esta magnitud coincide con la recomendada por Magnizki et al. (1964, p. 164), Torge (1989, p. 101) y Torge (2001, p. 266).

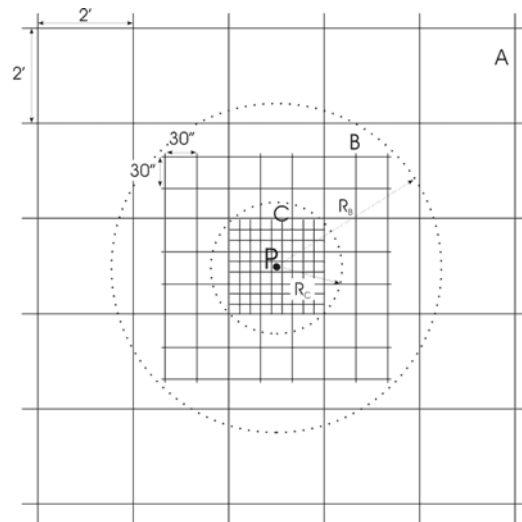


Figura 5.5 Zonas de integración definidas para el cálculo de la corrección por terreno (tomado de Forsberg 1997)

La corrección por terreno se calcula en el punto medio de cada bloque de (1' x 1') contenido entre [$\varphi = 7^\circ$ S, $\lambda = 82^\circ$ W] y [$\varphi = 17^\circ$ N, $\lambda = 64^\circ$ W], posteriormente, se adiciona a las anomalías simples de Bouguer interpoladas también a (1' x 1') y se determinan los valores medios de anomalía a (2' x 2'). Las magnitudes de la corrección por terreno en Colombia (figura 5.6) varían entre $-44 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+1\ 217,3 \mu\text{ms}^{-2}$, con una desviación estándar de $\pm 99,6 \mu\text{ms}^{-2}$ y un valor promedio de $+52,2 \mu\text{ms}^{-2}$.

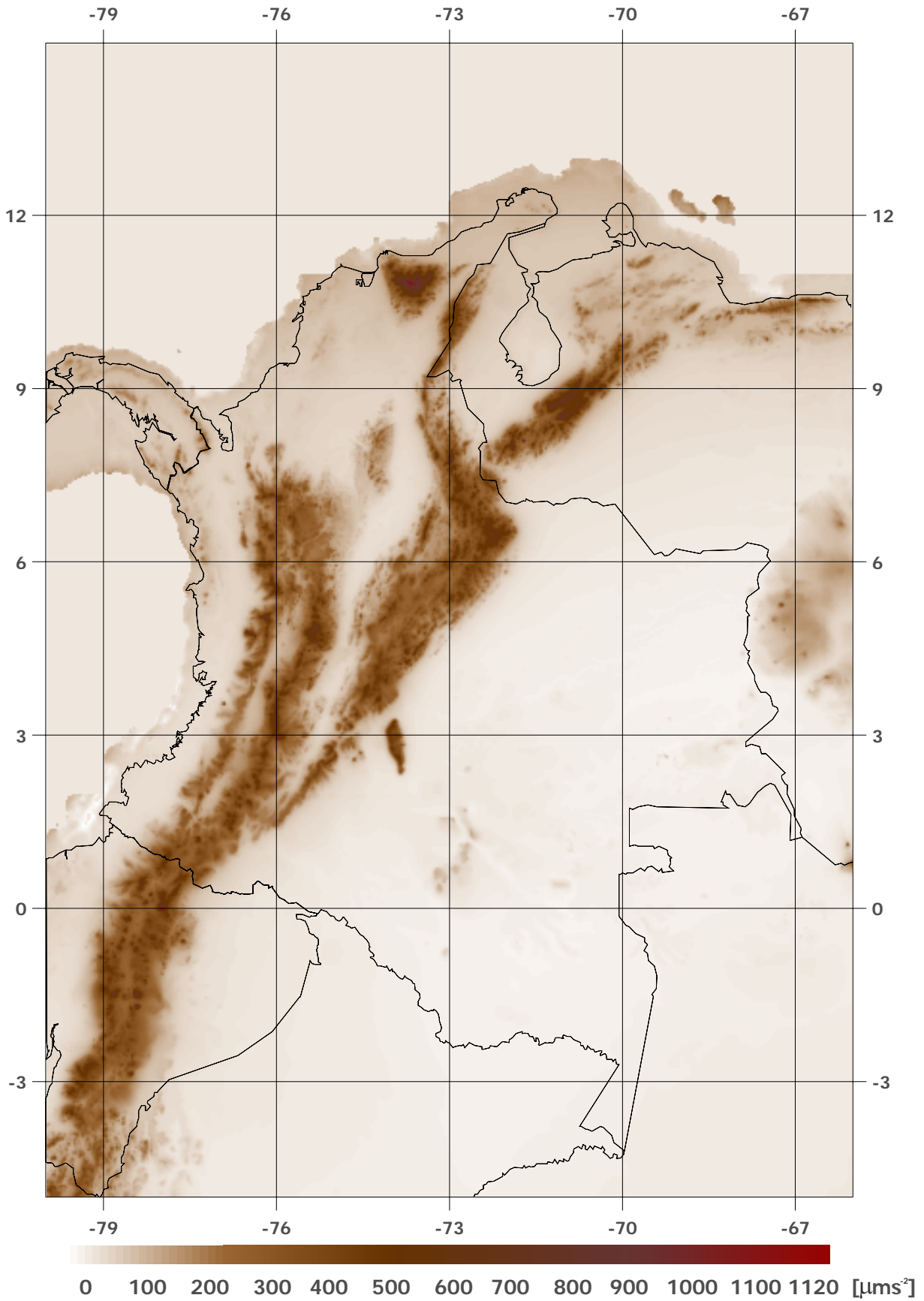


Figura 5.5 Corrección por terreno en Colombia

6 Cálculo de los modelos geoidal y cuasigeoidal

6.1 Técnica *Remove/Restore*

La Fórmula de Stokes para la solución del problema del valor límite (ecuación 3.7 ó 3.15) conduce a la determinación, punto a punto, del potencial anómalo o de perturbación T mediante la integración de las anomalías de gravedad dispuestas sobre la superficie de frontera (geoide o cuasigeoide). En la evaluación práctica, dicha integración se expresa como la sumatoria infinita de valores medios de anomalía distribuidos sobre elementos discretos de superficie [Capítulo 5], cuyo efecto, sobre el punto de cálculo, es ponderado a través de la Función de Stokes (3.8) en razón a la distancia esférica entre el punto de evaluación y el valor medio considerado. Esto significa que la obtención de N (o ζ) en cada punto de cálculo requiere de la integración (o sumatoria) de las anomalías gravimétricas distribuidas sobre toda la Tierra, lo cual sólo es posible con el apoyo de modelos globales de gravedad que sirvan de complemento a los conjuntos de datos locales o regionales obtenidos mediante técnicas de interpolación como las descritas en el capítulo anterior.

El potencial de perturbación T puede descomponerse en dos términos principales:

$$T = T_{global} + T_{regional} \quad (6.1)$$

donde T_{global} es la componente de longitudes de onda largas, derivada de un modelo global de gravedad [Sección 4.4, ecuación 4.14] y $T_{regional}$ es la componente residual del potencial de perturbación, después de habersele descontado el aporte del modelo global de gravedad.

En términos de la Integral de Stokes, la componente global se expresa como (entre otros, Heiskanen and Moritz 1967, Torge 2001):

$$T_{global} = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g_{GGM} \cdot S(\psi) d\sigma \quad (6.2)$$

Δg_{GGM} son las anomalías derivadas de un modelo global de gravedad:

$$\Delta g_{GGM} = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{n_{max}} (n-1) \left(\frac{a}{R}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (6.3)$$

siendo GM la constante gravitacional geocéntrica, \bar{P}_{nm} las funciones normalizadas de Legendre y $\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}$ las diferencias entre los coeficientes normalizados del potencial terrestre verdadero W y el normal U . Estas anomalías se determinan sobre la superficie terrestre de acuerdo con la Teoría de Molodenski y, por tanto, no incluyen reducciones gravimétricas.

La componente regional del potencial anómalo corresponde con:

$$T_{regional} = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} (\Delta g - \Delta g_{GGM}) S(\psi) d\sigma \quad (6.4)$$

Δg son las anomalías regionales dadas, ya sea sobre el geoide o sobre la superficie terrestre. En ambos casos, se introducen reducciones asociadas principalmente, a la topografía [sección 5.2]

que modifican el potencial anómalo; de allí, es necesario agregar a las componentes global y regional un tercer término, el efecto indirecto δT , el cual cuantifica las modificaciones mencionadas y permite obtener íntegramente el potencial anómalo.

$$T = T_{global} + T_{regional} + \delta T \quad (6.5)$$

El término $(\Delta g - \Delta g_{GGM}) = \Delta g_r$ corresponde con las llamadas anomalías residuales, las cuales no contienen ni las longitudes de onda largas del modelo global de gravedad, ni las longitudes de onda cortas provenientes de la topografía. Estas anomalías realizan la etapa de *remove* en el cálculo del geoide (o del cuasigeoide).

La evaluación numérica de (6.4) y la consecuente aplicación del Teorema de Bruns (3.2), proporcionan la componente regional del geoide $N_{regional}$ (o del cuasigeoide), a la cual debe restaurársele las componentes descontadas, es decir la global N_{global} y la topográfica $N_{\delta T}$. Esta adición realiza la etapa de *restore*:

$$N = N_{global} + N_{regional} + N_{\delta T} \quad ; \quad \zeta = \zeta_{global} + \zeta_{regional} + \zeta_{\delta T} \quad (6.6)$$

La ventaja de la técnica *remove/restore* es la reducción del radio máximo de integración ψ_{max} en la Función de Stokes $S(\psi)$, lo que permite una aproximación plana de la superficie terrestre y facilita la evaluación numérica correspondiente (p. ej. Torge 2001).

6.2 Determinación del cuasigeoide

6.2.1 Etapa de *Remove*

El proceso de *remove* se lleva a cabo en dos pasos: primero, se descuenta, de las anomalías terrestres de Molodenski, la componente de longitudes de onda cortas provenientes de la topografía (efectos topográficos o reducción por terreno) y, luego, se sustrae de éstas y de las anomalías marinas, la componente de onda larga derivada del modelo TEG-4 ($n = 200$). La figura 6.1 describe paso a paso el procedimiento ejecutado, parte de éste corresponde con el descrito en la Sección 5.1.

El rango de variación de las anomalías residuales [Anexo D] está entre $-1000 \mu\text{ms}^{-2}$ y $+2000 \mu\text{ms}^{-2}$, excepto en la Sierra Nevada de Santa Marta [$\sim \varphi = 11^\circ\text{N}$, $\lambda = 73^\circ\text{W}$], donde éstas alcanzan una magnitud de $+4997 \mu\text{ms}^{-2}$. Esta estructura topográfica es la más alta en Colombia (~ 5500 m), allí se presentan gradientes topográficos muy fuertes (1000 m de diferencia de altura en menos de 30 km de distancia horizontal) y siempre se destaca en las diferentes representaciones del campo de gravedad terrestre; por ejemplo, presenta los valores máximos en las anomalías derivadas del modelo TEG-4 ($\sim +2500 \mu\text{ms}^{-2}$) [Anexo D] y en la reducción por terreno ($\sim +1146 \mu\text{ms}^{-2}$) (figura 5.6). Infortunadamente, no se cuenta con datos terrestres de gravedad suficientes, que permitan verificar los valores allí obtenidos.

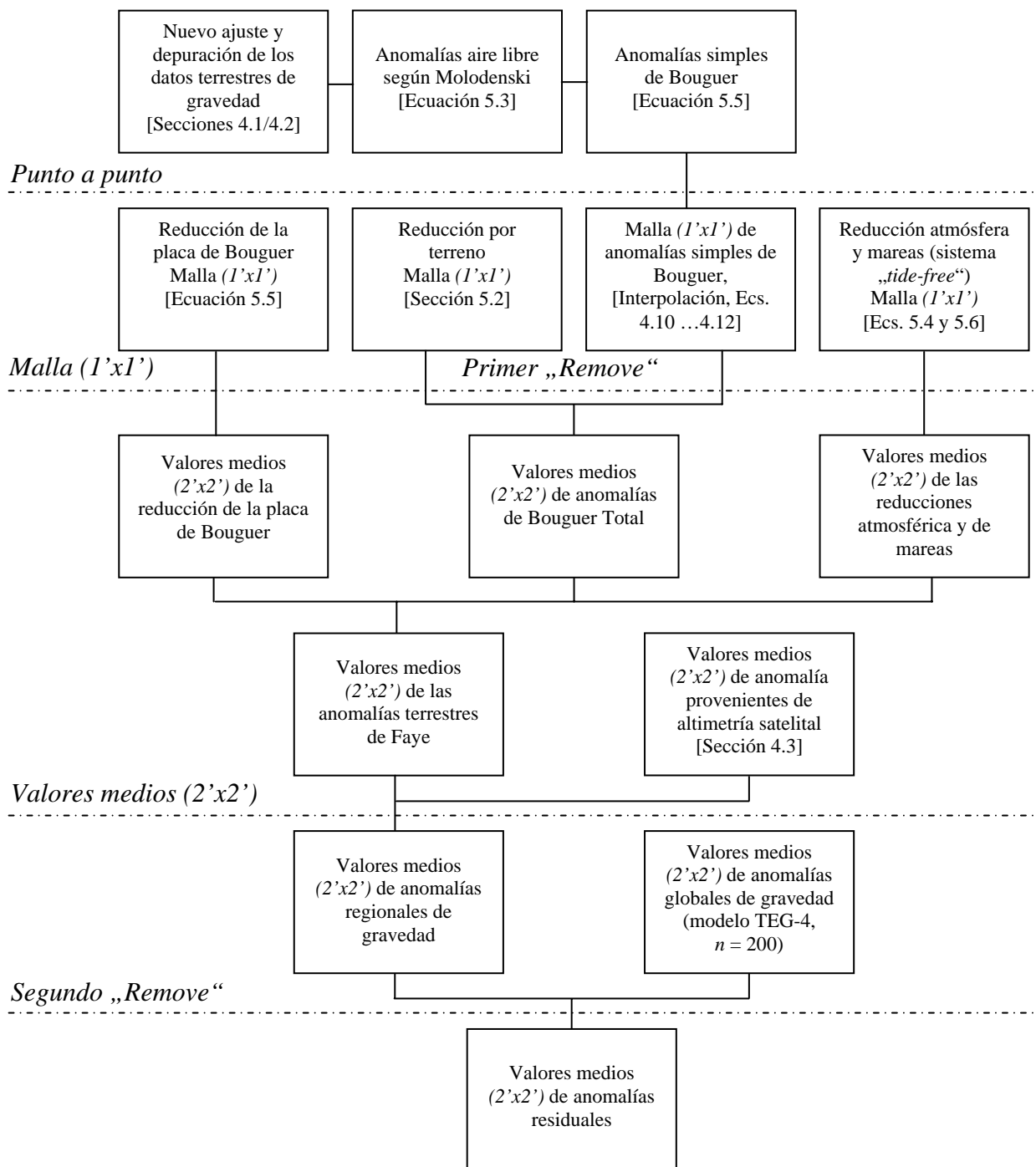


Figura 6.1 Cálculo de anomalías residuales (etapa de *remove*)

6.2.2 Cálculo de la componente regional del cuasigeoide

La representación discreta de la ecuación (6.4) corresponde con la sumatoria ponderada de los valores medios de anomalías residuales Δg_r distribuidos sobre mallas regulares. Su evaluación numérica se adelanta de forma equivalente al cálculo de la reducción por terreno (figura 5.5), donde, la Integral de Stokes se soluciona en aproximación plana para la zona interna C y, en aproximación esférica para la media B y la externa A .

En la zona de aproximación plana, se introduce un sistema bidimensional de coordenadas cartesianas, cuyo origen coincide con el punto de cálculo. Las anomalías gravimétricas, expresadas en términos de dichas coordenadas, corresponden con (p. ej. Kuhn 2000, p. 34 ff):

$$\Delta g_r = \Delta g_r(x_i, y_j) \quad (6.7)$$

i, j son los índices que identifican los bloques de una malla con dimensión (M x N).

El aporte de esta zona al cuasigeoide está dada por:

$$\zeta(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta g_r(x_i, y_j) \cdot k(x_k - x_i, y_l - y_j) \cdot \Delta x \Delta y \quad (6.8)$$

siendo $\Delta x \approx \Delta \varphi R$; $\Delta y \approx \cos \varphi \Delta \lambda R$ y R el radio terrestre ecuatorial ($R_{GRS80} = 6378\,137$ m). (x_k, y_l) es el elemento, en cuyo punto medio se encuentra el punto de cálculo. Su aporte (contenido en 6.8) es:

$$\zeta = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\gamma \pi} \Delta g$$

El argumento de la Función de Stokes se escribe como:

$$k(x_k - x_i, y_l - y_j) = \begin{cases} \left[(x_k - x_i)^2 + (y_l - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} & ; \quad x_k \neq x_i \text{ ó } y_l \neq y_j \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta x \Delta y}} & ; \quad x_k = x_i \text{ ó } y_l = y_j \end{cases} \quad (6.9)$$

En las zonas de aproximación esférica, las anomalías y las alturas anómalas se representan mediante (p. ej. Kuhn 2000, p 34 ff):

Anomalías de gravedad:

$$\Delta g_r = \Delta g_r(\varphi_i, \lambda_j) \quad (6.10)$$

(i, j) índices que identifican los bloques de la malla con dimensión (M x N)).

Aporte al cuasigeoide:

$$\zeta(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta g_r(\varphi_j, \lambda_k) \cdot S[\psi(\varphi_l, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i)] \cdot \cos \varphi \cdot \Delta \varphi \Delta \lambda \quad (6.11)$$

Argumento de la Función de Stokes:

$$S[\psi(\varphi_l, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i)] = \begin{cases} S[\psi(\varphi_l, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i)] & ; \quad \varphi_l \neq \varphi_j \text{ ó } \lambda_k \neq \lambda_i \\ \frac{4}{\sqrt{\cos \varphi \Delta \varphi \Delta \lambda y}} & ; \quad \varphi_l = \varphi_j \text{ y } \varphi_k = \varphi_i \end{cases} \quad (6.12)$$

La evaluación numérica de estas ecuaciones puede hacerse a través del análisis de Fourier o la transformación de *Wavelets*, cuyas principales ventajas están asociadas a la simplicidad, en el dominio de las frecuencias, de los operadores matemáticos contenidos en la Fórmula de Stokes y el ahorro en tiempo computacional al considerar conjuntos grandes de datos. Los resultados, independientemente de la técnica utilizada, deben ser idénticos. La utilización de análisis espectral en la solución de problemas geodésicos, especialmente, en la determinación de modelos geoidales o cuasigeoidales, se presenta, entre otros, en Forsberg and Solheim (1988), Harrison and Dickinson (1989), Haagmans et al. (1993), Windheuser (1995), Tziavos and Andritsanos (1998), Featherstone, et al. (2001).

En el presente trabajo, la formulación descrita se evalúa a través de una integración numérica utilizando el programa STOKES de GRAVSOFIT (Tscherning et al. 1992). En la zona de aproximación plana se define un radio de integración tres veces más grande que la dimensión de los compartimentos de la malla (~ 180 m) y las anomalías son densificadas mediante el método de interpolación *spline cubic*.

La definición del radio de integración ψ_{max} para las zonas de aproximación esférica, requiere de un análisis adicional sobre la variación de la componente cuasigeoidal en función del cambio de dicho radio, el cual, para el efecto, se ha modificado entre $0,5^\circ$ y 10° . Para cada una de estas soluciones, las alturas anómalas (ecuación 6.6) obtenidas se comparan con las derivadas a partir de posicionamiento GPS (alturas elipsoidales h) y alturas normales (H^N) en 38 puntos distribuidos en un perfil de 300 km de extensión, con cambios de altura hasta de 2500 m. El valor promedio de las diferencias $\varepsilon = h - H^N - \zeta$ crece proporcionalmente con la magnitud del radio de integración (tabla 6.1), es decir, que si éste es exagerado, pueden generarse errores sistemáticos en la componente regional del cuasigeoide (Forsberg and Featherstone 1998); no obstante, si éste es muy corto, pueden obviarse componentes espectrales de alta frecuencia en el campo de gravedad residual, lo que también conduciría a errores sistemáticos del cuasigeoide. En el presente trabajo, ψ_{max} se ha definido en $1,8^\circ$, dado que este valor coincide con la resolución del modelo global de gravedad utilizado (TEG-4, $n = 200$) y además ofrece la menor desviación estándar de las diferencias ε (tabla 6.1).

Tabla 6.1 Comparación, en función del radio de integración ψ , de las alturas anómalas derivadas de alturas normales y elipsoidales, con las obtenidas a partir de la Fórmula de Stokes [$\varepsilon = h - H^N - \zeta$]

Radio de integración ψ [°]	Valor promedio de ε [m]	Desviación estándar de ε [m]
0,5	0,15	$\pm 0,89$
1,0	-0,86	$\pm 0,95$
1,8	-2,16	$\pm 0,55$
2,0	-2,60	$\pm 0,56$
3,0	-3,86	$\pm 0,70$

El valor promedio de ε puede contener efectos sistemáticos provenientes de eventuales errores de longitudes de onda largas y medias del modelo global TEG-4, pues la determinación de sus coeficientes armónicos esféricos incluye anomalías terrestres, las cuales están influenciadas por los diferentes niveles de los datum verticales locales utilizados en su reducción. Igualmente, por

la misma razón, es posible que los datos regionales gravimétricos contengan inconsistencias sistemáticas en su nivel absoluto, pero a pesar de su comparación con los diferentes modelos globales de gravedad [Sección 4.4], éstas no se han identificado. Pueden adelantarse análisis más juiciosos sobre la confiabilidad del nivel de los datos regionales en un contexto global a partir de su comparación con un modelo de gravedad derivado exclusivamente de información satelital, cuya resolución sea lo suficientemente alta para evitar el fenómeno de Gibbs y eliminar la influencia de la trayectoria satelital en la información gravimétrica derivada. Una buena alternativa para este propósito son los modelos que se obtendrán de la nueva misión GRACE.

La componente regional del cuasigeoide ($\zeta_{regional}$) varía entre -3,6 m y 9,6 m [Anexo D], sus valores máximos coinciden con los gradientes topográficos más fuertes, especialmente, en la Sierra Nevada de Santa Marta y las Cordilleras Oriental y Central. Dada la compleja estructura topográfica del país, es importante que la superficie vertical de referencia refleje, en cierta medida, las características más sobresalientes del relieve; de allí, se prefiere que el cuasigeoide calculado sea consistente con las alturas anómalas derivadas de las elipsoidales menos las normales. Con este argumento, se confirma una vez más, la definición del radio de integración ψ en $1,8^\circ$.

6.2.3 Etapa de *Restore*

La componente regional del cuasigeoide debe ser complementada con la componente global y la influencia de las altas frecuencias provenientes de la topografía (6.6), de modo que el campo de gravedad terrestre sea considerado íntegramente en el modelo cuasigeoidal final. En este sentido, la componente global ζ_{global} se calcula mediante (3.2b) y (4.14), utilizando los coeficientes del modelo TEG-4, con $n = 200$. Sus valores varían de -40,76 m, en el mar Caribe venezolano [$\sim \varphi = 13^\circ$, $\lambda = 67^\circ$ W], hasta +30,22 m en la Cordillera de Los Andes [$\sim \varphi = 3^\circ$, $\lambda = 76^\circ$ W] [Anexo D].

La componente de longitudes de onda cortas (*efecto indirecto*) se determina a través de (Heiskanen and Moritz 1967, p. 322; Sjöberg 2000, ecuación 25b):

$$\zeta_{\delta T} = \frac{\delta W}{\gamma_Q} \approx \frac{\pi \rho H^N}{\gamma_Q} \quad (6.13)$$

con $\rho = 2670 \text{ kg m}^{-3}$, H^N (altura normal) \approx altura nivelada y γ_Q gravedad normal sobre el teluroide.

La modificación del potencial δW también genera alteraciones en las anomalías gravimétricas, las cuales se conocen como *segundo efecto indirecto* y son cuantificadas mediante (Sjöberg, 2000):

$$\frac{2\gamma}{R} \zeta_{\delta T} \quad (6.14)$$

En el presente cálculo, dicho efecto ha sido omitido, dado que la máxima magnitud que alcanza en el área de estudio es $5,6 \mu\text{ms}^{-2}$.

El efecto indirecto $\zeta_{\delta T}$ depende fuertemente de la topografía, sus valores oscilan entre 0 m y 1,82 m, con un promedio de 0,04 m y una desviación estándar de 0,13 m [Anexo D].

6.3 Modelo cuasigeoidal *QgeoCol2004*

La suma de las tres componentes calculadas en las secciones [6.2.2] y [6.2.3] conduce a la obtención del cuasigeoide total (ecuación 6.6). Éste se ha denominado *QgeoCol2004* y se representa gráficamente en la figura 6.2. Las alturas anómalas correspondientes están distribuidas sobre una malla de (2' x 2'), siendo los valores extremos -40,90 m (mar Caribe) y +36,65 m (cordillera Central).

En comparación con el modelo previo *GeoCol2001* [Sección 2.3], *QgeoCol2004* presenta una resolución más alta, especialmente, en aquellas regiones donde se han incluido los datos gravimétricos proporcionados por ECOPEPETROL [Anexo D]. Las diferencias mínimas entre estos dos modelos (-3 m) se presentan en el oeste de Colombia [$\sim \varphi = 8^\circ \text{ N}$, $\lambda = 76^\circ \text{ W}$] y coinciden con la divergencia entre TEG-4 y EGM96, modelo utilizado en esa ocasión como campo de referencia [Anexo D]. Las diferencias máximas (+7 m), en la zona selvática del Amazonas, obedecen principalmente, a que en el modelo anterior los valores medios de anomalía residual para los compartimentos vacíos se igualaron a cero; mientras que, en este cálculo dichos bloques fueron cubiertos con anomalías medias del modelo TEG-4, las cuales, a su vez, fueron reducidas por los efectos topográficos [Sección 5.2].

La tabla 6.2 muestra las diferencias $\varepsilon = h - H^N - \zeta$ entre las alturas anómalas (ζ) de los modelos *GeoCol2001* y *QgeoCol2004*, las elipsoidales (h) y las normales (H^N) en los tres mareógrafos principales de Colombia (figura 2.1). Las discrepancias $\varepsilon_{GeoCol2001}$ presentan un nivel absoluto mucho menor que las obtenidas de *QgeoCol2004*, lo cual es explicable, dado que el modelo EGM96 contiene datos gravimétricos terrestres, cuyas anomalías fueron reducidas utilizando las alturas sobre el nivel medio del mar definido por estos mareógrafos; no obstante, la variación relativa de $\varepsilon_{GeoCol2001}$ entre los tres puntos es mucho mayor que con *QgeoCol2004*. Las discrepancias $\varepsilon_{QgeoCol2004}$ presentan una componente sistemática alta ($\sim -0,77 \text{ m}$), la cual puede entenderse como una divergencia de longitud de onda larga entre el modelo TEG-4 y los datos regionales de gravedad [Sección 6.2.2]. Las variaciones relativas de $\varepsilon_{QgeoCol2004}$ entre los tres mareógrafos alcanzan apenas algunos centímetros, lo que indica que la componente regional del cuasigeoide es consistente y que su nivel absoluto puede mejorarse utilizando un modelo global de gravedad definido a partir de información satelital de alta resolución.

Tabla 6.2 Comparación de los modelos *QgeoCol2004* y *GeoCol2001* en los principales mareógrafos de Colombia

Mareógrafo	h [m]	H^N [m]	$\zeta_{GeoCol2001}$ [m]	$\zeta_{QgeoCol2004}$ [m]	$\varepsilon_{GeoCol2001}$ [m]	$\varepsilon_{QgeoCol2004}$ [m]
Buenaventura	20,66	3,63	17,32	17,77	-0,29	-0,74
Cartagena	-4,50	1,13	-5,97	-4,92	0,34	-0,71
Tumaco	18,70	3,22	15,11	16,34	0,37	-0,86

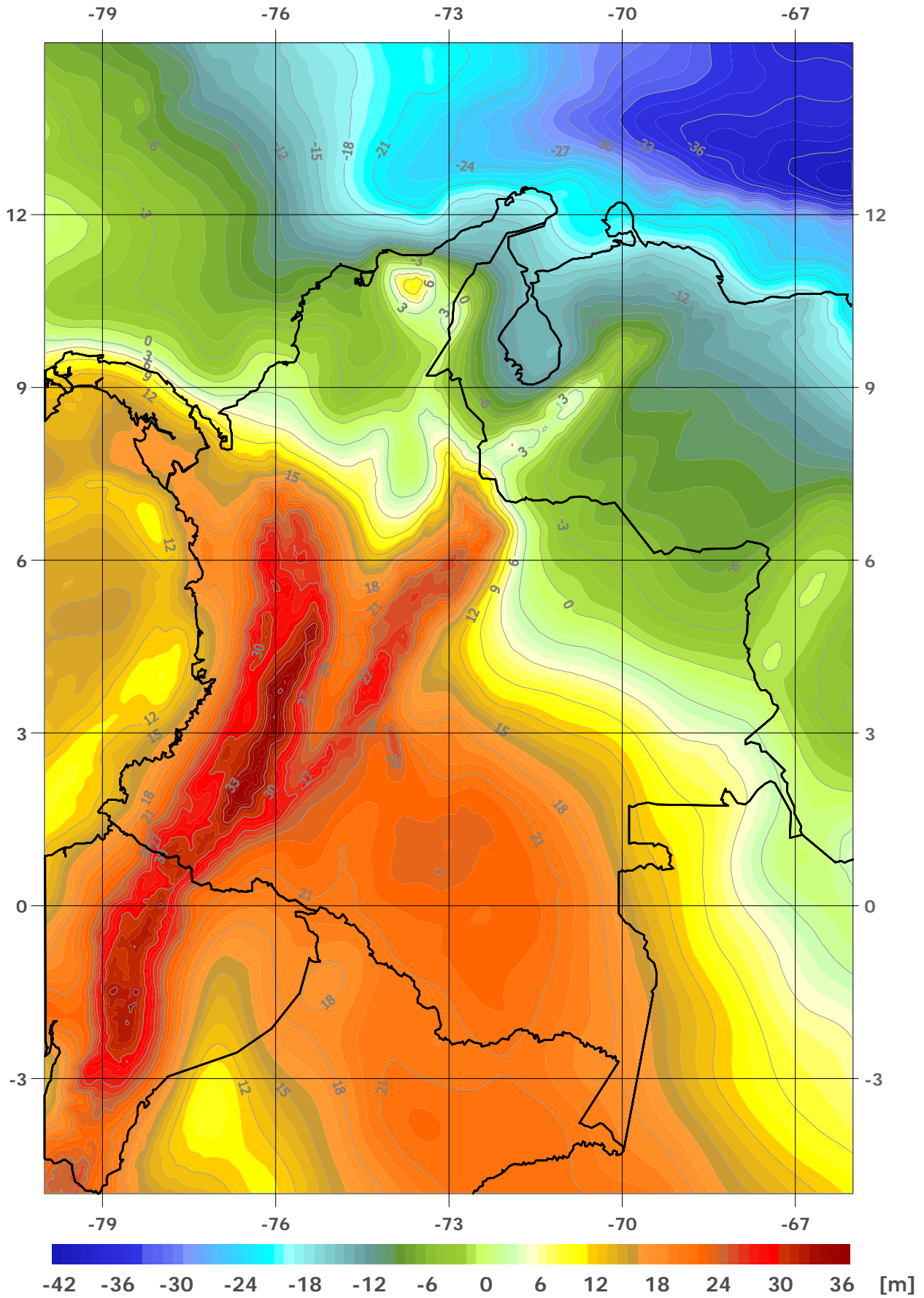


Figura 6.2 Modelo cuasigeoidal *QgeoCol2004*

6.4 Modelo geoidal *GeoCol2004*

La ecuación (3.16) representa la relación directa entre el geoide y el cuasigeoide, la cual es una función de las anomalías medias de Bouguer ($\bar{g} - \bar{\gamma}$) y equivale a la diferencia entre las alturas ortométricas y las normales. La aplicación de esta ecuación corresponde con el segundo método de condensación de Helmert (Forsberg 1997, Rapp 1997) y permite la conversión de un modelo cuasigeoidal en uno geoidal o viceversa. Esta ecuación puede escribirse como (Heiskanen and Moritz 1967, p. 326):

$$N - \zeta = \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H^o \quad (6.14)$$

Δg_B son las anomalías de Bouguer calculadas a través de (5.5) [Sección 5.11], $\bar{\gamma}$ es la gravedad normal media derivada del elipsoide GRS80 y H^o es la altura ortométrica, la cual, en este caso, se sustituye con la altura nivelada.

La ecuación (6.14) se evalúa numéricamente sobre la malla de (2' x 2') de las alturas anómalas, obteniéndose el modelo geoidal *GeoCol2004* [Anexo D]. Su comparación con el cuasigeoide *QgeoCol2004* presenta las discrepancias extremas (-1,38 m en los Andes ecuatorianos y +0,42 m en la Sierra Nevada de Santa Marta) justo en los lugares donde las anomalías de Bouguer tienen su mínimo y su máximo (figura 6.3). El geoide presenta un comportamiento más suave y menos dependiente de la topografía [Anexo D, figura D.5] que el cuasigeoide, el cual al ser derivado de anomalías sobre la superficie terrestre, tiene una correlación alta con el relieve.

6.5 Comparación con alturas anómalas provenientes de nivelación geodésica y posicionamiento GPS

La principal aplicación de un modelo geoidal o cuasigeoidal es la definición de un sistema vertical de referencia moderno, que permita su combinación con el sistema de referencia terrestre geométrico (ITRS: International Terrestrial Reference System) sobre el que se definen las alturas elipsoidales determinadas con GPS. De hecho, las ondulaciones geoidales o las alturas anómalas a nivel regional o global, se constituyen en el término de vinculación de los sistemas geodésicos clásicos, donde las posiciones horizontales (latitud y longitud) se definían independientemente de las verticales (altura sobre el nivel medio del mar), con los tridimensionales, los cuales permiten definir todas las coordenadas sobre una misma superficie de referencia, el elipsoide. Este aspecto es de especial importancia en la agrimensura a cualquier escala (desde la topografía convencional hasta el establecimiento de marcos geodésicos de referencia), pues la utilización de modelos geoidales (o cuasigeoidales) combinados con datos GPS, permite la obtención de alturas físicas (ortométricas o normales) sin necesidad de adelantar los dispendiosos procesos de nivelación (eletro-) óptica.

En este sentido, las alturas anómalas obtenidas en el presente cálculo, son comparadas con sus equivalentes derivadas de alturas elipsoidales menos alturas normales sobre algunos puntos de nivelación. Dado que las alturas oficiales de Colombia no han sido corregidas por el efecto del campo de gravedad terrestre, las alturas normales correspondientes son tomadas de Sánchez (2002). Los 38 puntos evaluados se encuentran sobre una línea de nivelación de 300 km de extensión, cuyo rango de variación vertical es superior a 2 500 m (figura 6.4).

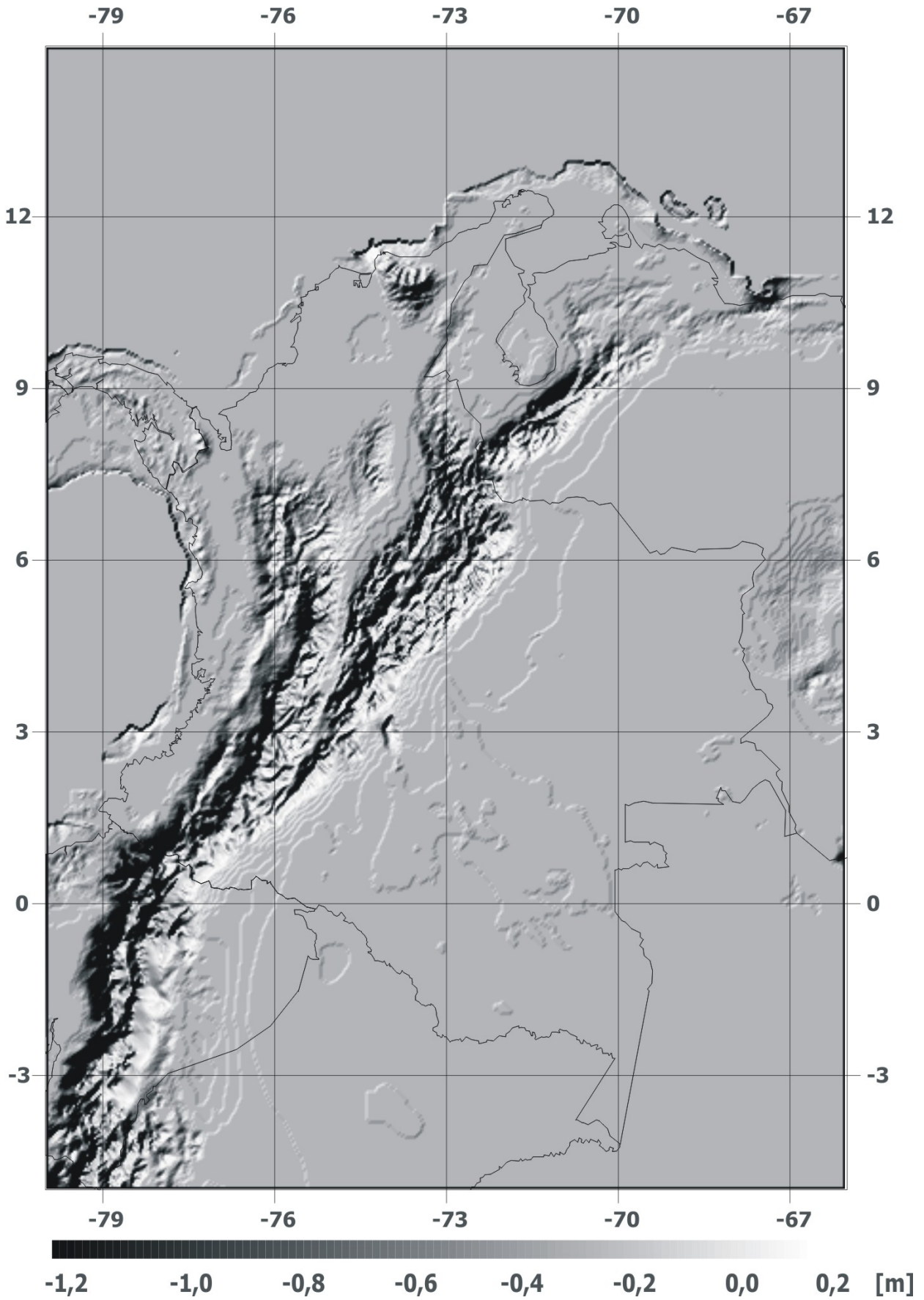


Figura 6.3 Diferencias entre las ondulaciones geoidales y las alturas anómalas

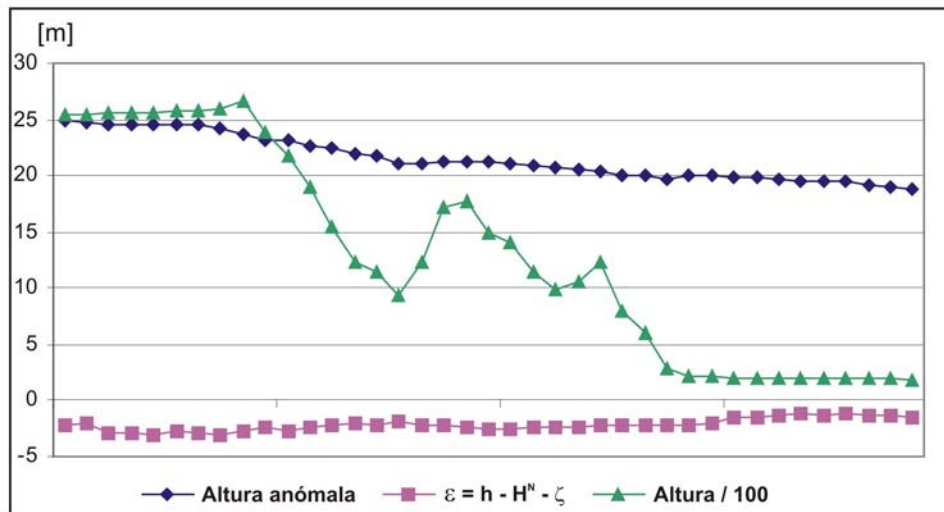


Figura 6.4 Discrepancias $\varepsilon = h - H^N - \zeta$ sobre una línea de nivelación

En el perfil seleccionado se observa la correlación existente, tanto entre las alturas anómalas (ζ) y las normales (H^N), como entre las discrepancias $\varepsilon = h - (H^N + \zeta)$ y la topografía. Los valores de ε varían entre -1,20 m y -3,13 m, con una desviación estándar de $\pm 0,55$ m y un valor promedio de -2,16 m, el cual puede ser resultado de errores sistemáticos contenidos, ya sea en el cuasigeoide o en la nivelación [Sección 6.2.2], aumentados también, en cierta medida, por el procesamiento estándar de la información GPS. Además del perfil, se analizan otros 25 puntos de nivelación ocupados con GPS, cuya distribución es aleatoria sobre el territorio colombiano. El valor promedio de ε para todos los puntos es de -2,04 m y la desviación estándar de $\pm 0,71$ m. Estas cantidades refuerzan la suposición asociada a la existencia de un error sistemático en el nivel absoluto del modelo cuasigeoidal calculado.

Recordando los datos presentados en la tabla 6.2 [Sección 6.3], puede decirse que el nuevo modelo *QgeoCol2004* presenta una mayor consistencia en las áreas costeras que en las continentales (especialmente en Los Andes), lo que podría asumirse como un efecto de longitud de onda larga incluido en el modelo de referencia TEG-4 (p. ej. generado por la continuación hacia abajo de los datos satelitales), o un error sistemático en las anomalías gravimétricas regionales (p. ej. proveniente de la densidad de masas utilizada en la reducción topográfica) ó, inconsistencias de los datos de nivelación causadas por los fuertes gradientes topográficos (hasta 4000 m) y las extensas longitudes cubiertas en el proceso de medición (varios miles de kilómetros).

7 Resumen y actividades futuras

Con el presente trabajo se ha obtenido, de acuerdo con la Teoría de Molodenski y aplicando la técnica *remove/restore*, un modelo cuasigeoidal como superficie vertical de referencia para las alturas normales en Colombia, las cuales, dentro del marco del proyecto SIRGAS, serían adoptadas como oficiales. Para el efecto, la información terrestre de gravedad disponible ha sido analizada en detalle, incluyendo el reajuste de las redes gravimétricas de referencia y la evaluación y reducción de cada uno de los proyectos geofísicos proporcionados por ECOPETROL, de modo que sean compatibles con el sistema gravimétrico nacional SIGNAR. En las áreas marinas adyacentes se han incluido anomalías de gravedad derivadas de altimetría satelital.

Los efectos gravitacionales de la topografía han sido evaluados con apoyo en un modelo digital de terreno (30"x30") de mayor resolución que los anteriores; no obstante, se ha utilizado el valor convencional constante ($\rho = 2670 \text{ kg m}^{-3}$) para la densidad de masas. Dada las fuertes estructuras topográficas existentes en Colombia, estos efectos alcanzan magnitudes muy altas (hasta $1200 \mu\text{ms}^{-2}$ en las anomalías gravimétricas) y son determinantes en la precisión final del cuasigeoide; de allí, sería conveniente utilizar un modelo digital de terreno más detallado (p. ej. 100 m x 100 m).

El resultado es un cuasigeoide gravimétrico en una malla de (2' x 2') sobre Colombia y las áreas fronterizas inmediatas de sus países vecinos. En comparación con los modelos calculados anteriormente, éste es más preciso y su resolución es más alta, lo que hace que represente con mayor detalle las estructuras geológicas y topográficas del país. Igualmente, a partir de este cuasigeoide y utilizando el segundo método de condensación de Helmert, se ha obtenido un modelo geoidal, el cual presenta un comportamiento más suave y hace evidentes las diferencias entre la superficie de frontera representada por una equipotencial del campo de gravedad terrestre cercana al elipsoide y aquella representada por la superficie física de la Tierra dentro del campo de gravedad normal.

La comparación del modelo cuasigeoidal gravimétrico con las alturas anómalas derivadas de las elipsoidales (GPS) y las normales (nivelación + corrección por efecto gravitacional) muestra una componente sistemática de ~2 m, la cual depende fuertemente del radio de integración utilizado en la evaluación de la Fórmula de Stokes y del modelo global de gravedad asumido como campo de referencia. Sin embargo, la desviación estándar de las diferencias [$\varepsilon = h - H^N - \zeta$] es de apenas $\pm 0,5$ m, lo que indica que relativamente el cuasigeoide calculado tiene una buena precisión, pero que su nivel absoluto debe ser controlado a partir de un modelo global de gravedad derivado, exclusivamente, de datos satelitales. Esto significa, que las próximas estimaciones del geoide (o cuasigeoide) en Colombia deben involucrar como campo de referencia modelos de gravedad derivados de las misiones CHAMP y GRACE o, posteriormente, de GOCE.

La reducción de errores sistemáticos en la componente regional del cuasigeoide requiere de datos gravimétricos más densos y mejor distribuidos sobre el territorio nacional, pues la información disponible actualmente, no es suficiente para evaluar el efecto gravitacional íntegro de las fuertes estructuras geológicas y topográficas existentes en el país. Asimismo, se necesita de un modelo digital de terreno de mayor resolución, cuyas alturas estén asociadas al datum vertical local, o por lo menos, al mismo punto de referencia con que se calculan las reducciones de las anomalías gravimétricas.

Si bien el modelo obtenido supera en calidad a los anteriores, su precisión aún no es suficiente para su aplicación directa en la agrimensura. La obtención de alturas normales u ortométricas a partir de las relaciones $[H^N = h - \zeta]$ ó $[H^O = h - N]$ aún no es posible, no sólo por la discrepancia sistemática presente en los diferentes modelos geoidales o cuasigeoidales calculados, sino también, porque en Colombia las alturas clásicas niveladas no han sido corregidas por el efecto de la gravedad, el cual fácilmente puede generar errores hasta de 1 m en las zonas montañosas del país. De allí, para que los levantamientos GPS sean *consistentes* con las alturas oficiales, se recomienda la determinación relativa de alturas clásicas a partir de diferencias, también relativas, entre alturas elipsoidales y anómalas (o geoidales); es decir: $[\Delta H = \Delta h - \Delta \zeta]$ ó $[\Delta H = \Delta h - \Delta N]$. Esta metodología implica que el punto base de un levantamiento diferencial GPS haya sido nivelado clásicamente dentro del sistema de alturas vigente en Colombia. La precisión de las alturas así obtenidas nunca será mejor que la de una nivelación trigonométrica (~ 0,80 m), por tanto, las aplicaciones topográficas o geodésicas que requieran mayores precisiones en la componente vertical de sus redes, necesariamente, deben utilizar métodos (electro) ópticos de nivelación.

La tarea inmediata que resulta del presente trabajo, es el cálculo y ajuste de los números geopotenciales correspondientes a las líneas de nivelación extendidas sobre el territorio colombiano, de modo que se avance en la adopción oficial y utilización práctica de alturas físicas (preferiblemente, normales) en el país. Este paso es indispensable para la definición y realización de un sistema vertical de referencia moderno, que permita el aprovechamiento máximo de las técnicas avanzadas de posicionamiento, tanto a nivel práctico, como científico.

Referencias

- Amod, A. Ch. Merry (2001). *A note on the Molodensky G_1 Term*. Bulletin of the International Geoid Service. Nr. 11: 25 - 42
- Andersen, O. and P- Knudsen (2000). *The role of satellite altimetry in gravity field modelling in coastal areas*. Phys. Chem. Earth (A) Vol. 25, No. 1: 17 - 24.
- Boedecker, G., Th. Fritzer (1986). *International Absolute Gravity Basestation Network*. Veröffentlichung Bayerischer Kommission für die Internationale Erdmessung. Astro.-Geod. Arb. 47, München.
- Bosch, W., G. Acuña, C. Brunini, R. Maturana, R. Luz, L. Sánchez (2001). *Connecting sea level and height systems along the coast of South America, first assessment*. IAG 2001 Scientific Assembly, Budapest, 02. – 08. 09. In: DGFI Posterübersicht 2000/2001, DGFI, München.
- Bosch, W. (2003). Persönliche Mitteilungen.
- Denker, H., W. Torge (1998). *The European gravimetric quasigeoid EGG97 – an IAG supported continental enterprise*. IAG Symposia, V. 119: 249 – 254
- DGFI (2001/2002). *Jahresbericht 2001/2002 des Deutschen Geodätischen Forschungsinstituts*, DGFI. München. S. 18 ff.
- DMA (1988). *World Geodetic System 1984: Parameters, formulas and graphics for the practical application of WGS-84*. Technical report, part two. Supplement to Department of Defense, DMA, Defense Mapping Agency: 601-610.
- Drewes, H. (1976): *Berechnung regionaler Geoidundulationen durch gravimetrisches Nivellement mit Prädiktion der Schwereanomalien*. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover, Heft 63, Hannover.
- Drewes, H. (1978a). *Zur Ausgleichung von Gravimeternetzen*. ZfV 103 (10): 485 - 496.
- Drewes, H. (1978b). *Experiences with least squares collocation as applied to interpolation of geodetic and geophysical quantities*. XII Symposium on Mathematical Geophysics. Caracas.
- Drewes, H. W. Sánchez (1978). *La evaluación de mediciones geodésicas en forma de redes libres, redes apoyadas y redes fijadas*. Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería, Maracaibo.
- Featherstone W., J. Kirby (2000). *The reduction of aliasing in gravity anomalies and geoid heights using digital terrain data*. Geophys. J. Int. 141: 204 - 212.
- Featherstone W., J. Kirby, A. Kearsly, J. Gilliland, G. Johnston, J. Steed, R. Forsberg, M. Sideris (2001). *The AUSGeoid98 geoid model of Australia: data treatment, computations and comparisons with GPS-levelling data*. Journal of Geodesy, 75: 313 - 330.

- Fernandes, M., L. Bastos, and J. Catalao (2000). *The role of multi-mission ERS altimetry in the determination of the marine geoid in the Azores*. Marine Geodesy, 23: 1 - 16.
- Forsberg, R., D. Solheim (1988). *Performance of FFT methods in local gravity field modelling*. In *Proc. of the Chapman Conference on progress in the determination of Earth's gravity field*, Fort Lauderdale, Florida, Sept. 13 – 16: 100-103.
- Forsberg, R. (1997). *Terrain effects in geoid computations*. International School for the determination of the geoid. Lecture Notes. International Geoid Service, Milan. S. 149 - 182.
- Forsberg, R. and C. Tscherning (1997). *Topographic effects in gravity field modelling for boundary-value problems*. Geodetic boundary-value problems in view of the 1 cm – geoid. Lecture Notes in Earth Sciences 65. F. Sanso and R. Rummel Eds. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg S. 241 - 272.
- Forsberg, R., W. Featherstone (1998). *Geoids and cap sizes*. IAG Symposia: V. 119: 194 - 200.
- Fotopoulos, G.; C. Kotsakis; M. Sideris (1999). *A new Canadian geoid model in support of levelling by GPS*. Geomatica, 53(4): 227 – 241.
- Gantar C., C. Morelli (1962a). *Measurements with gravity-meters along the northern part of European calibration line: Bad Harzburg – Bodö*. Boll. Geof. teor. appl. IV: 183 - 228.
- Gantar C., C. Morelli (1962b). *First order world gravity loop*. Boll. Geof. teor. appl. IV: 229 - 270.
- Gantar C., C. Morelli (1963). *New experimental data about temperature and pressure effects on Worden gravity meters*. Boll. Geof. teor. appl. V: 175 - 186.
- García J., E. Cuervo (1978). *Pronóstico de pleamares y bajamares en la costa occidental de Colombia para el año de 1978*. IGAC, Bogotá.
- Goos, J., W. Featherstone, J. Kirby, S. Holmes (2001). *Experiments with two different approaches to gridding terrestrial gravity anomalies and their effect on regional geoid computation*. In: www.und.ac.za/und/survey/ssg/feather.html
- Haagmans, R. E. De Min, M. van Gelderen (1993). *Fast evaluation of convolutions integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for the Stokes' integral*. Manuscripta Geodaetica, V. 18: 227-241
- Hammond, J., J. Faller (1971). *Results of absolute gravity determinations at a number of different sites*. Journal of Geophysical Research, V. 76: 7850-7854.
- Harrison, J., M. Dickinson (1989). *Fourier transform methods in local gravity field modelling*. Bulletin Geodesique, V. 63: 149-166.
- Heiskanen W. And H. Moritz (1967). *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and company. San Francisco.
- Heiskanen W., F. Vening Meinesz (1958). *The Earth and its gravity field*. McGraw Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London.

- Hipkin, R. (2000). *Modelling the geoid and sea surface topography in coastal areas*. Phys. Chem. Earth (A) Vol. 25, No. 1: 9 - 16.
- IGAC (1960). *Nivelación geodésica, resultados definitivos : puntos y cotas. Resolución 1155 del 25 de septiembre de 1965*, por la cual se adoptan altitudes básicas para fines catográficos y geofísicos. Publicación PE No. 13 IGAC, Instituto Geográfico Agustín Codazzi, Bogotá.
- Kuhn, M. (2002). *Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen*. DGK, Reihe C, Hef Nr. 520, München.
- Lemoine F., S. Kenyon, J. Factor, R. Trimmer, N. Pavlis, D. Chinn C. Cox, S. Kloslo, S. Luthcke, M. Torrence, Y. Wang, R. Williamson, E. Pavlis, R. Rapp, T. Olson (1998). *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*, NASA, Goddard Space Flight Center, Greenbelt.
- Magnizki, W., W. Browar, B. Schimbirew (1964). *Theorie der Figur der Erde*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
- Martínez, W., L. Sánchez, J. Flórez (1995). *Determinación de nuevas estaciones absolutas de gravedad en Colombia*. En: Geofísica Colombiana, No. 3: 21 – 87.
- Martínez, W., L. Sánchez (2001). *Improving the quasigeoid model in Colombia*. In: International Symposium on Vertical Reference Systems. IAG Symposia, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. V. 124: 152 - 156.
- McConnell, K., P. Winter, R. Geller (1979). *Latin American Gravity Standardization Network 1977 (LAGSN77)*. Earth Physics Branch, Canada and Inter American Geodetic Service, Panama.
- McConnell, K., I. Escobar, L. Sánchez, M. Pastorino, M. Araneda, M. Avendaño, J. Tellería (1995). *Progreso reciente en el desarrollo de la red latinoamericana de gravedad 1995*. Instituto Panamericano de Geografía e Historia (IPGH). III Reunión Técnica de la Comisión de Geofísica. México.
- McConnell, K., (1998). *Software GRAVPACK*. Gravico Geoscience Inc., Ottawa.
- Morelli, C., C. Gantar, T. Honkasalo, K. McConnell, J. Tanner, B. Szabo, U. Uotila, C. Wahlen (1974). *The International Standardization Net 1971 (IGSN71)*. IUGG-IAG, Publ. Spec. No. 4, Paris.
- Moritz, H. (1963). *Statistische Methoden in der gravimetrischen Geodäsie*. ZfV 88: 409 - 416.
- Moritz, H. (1980a) *Geodetic reference system 1980*. Bulletin Geodesique. Vol. 54. No. 3: 395-405.
- Moritz, H. (1980b). *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Müller, J. (2001). *Die Satellitengradiometriemission GOCE - Theorie, technische Realisierung und wissenschaftliche Nutzung*- DGK, Reihe C, Hef Nr. 541, München.
- NOAA (1988). *Data Announcement 88-MGG-02, Digital relief of the Surface of the Earth*. NOAA, National Geophysical Data Center, Boulder, Colorado.

Olesen, A., A. Andersen, C. Tscherning (2002). *Merging airborne gravity and gravity derived from satellite altimetry: test cases along the coast of Greenland*. Stud. Geophys. Geod. 46: 387-394, Prague.

Pavlis, N. (1997). *Development and applications of geopotential models*. International School for the determination of the geoid. Lecture Notes. International Geoid Service, Milan. S. 101 - 134.

Rapp, R. (1989). *Combination of satellite, altimetric and terrestrial gravity data*. Theory of satellite geodesy and gravity field determination. Lecture Notes in Earth Sciences 25. F. Sanso and R. Rummel Eds. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg. S. 261 - 284.

Rapp, R. H. (1997a): *Use of potential coefficients models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly / geoid undulation difference*. Journal of Geodesy, Vol. 71, No. 5, S. 282-289

Rapp, R. (1997b). *The use of potential coefficients models in computing geoid..* International School for the determination of the geoid. Lecture Notes. International Geoid Service, Milan. S. 71 - 97.

Reigber, Ch., H. Lühr, P. Schwintzer (2000). *Status of the CHAMP mission*. In: Towards an integrated global geodetic observing system (IGGOS). IAG Symposia, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. V. 120: 63 - 65.

Reigber, Ch., P. Schwintzer, K. Neumayer, F. Barthelmes, R. König, Ch. Förste, G. Balmino, R. Biancale, J. Lemoine, S. Loyer, S. Bruinsma, F. Perosanz, F. Fayard (2003). *The CHAMP-only Earth Gravity Field Model EIGEN-2*. Advances in Space Research, accepted in Jan.

Sánchez, L., W. Martínez, G. Rocha (1995). *Un modelo geodésico para Colombia*. En: Geofísica Colombiana. No. 3: 59 - 66.

Sánchez, L. (1996). *Sistema gravimétrico nacional de referencia*. En: Revista Cartográfica. Bogotá, Marzo, pp. 11-20.

Sánchez, L., W. Martínez, J. Flórez, G. Obando, H. Esquivel (1998). *Mapa gravimétrico de Colombia*. IGAC-INGEOMINAS. D'vinni, Bogotá.

Sánchez, L., W. Martínez, J. Flórez (1999). *Determinación de un geoide gravimétrico para Colombia*. En: IGeS Bulletin Nr. 9: 87-97, Milano.

Sánchez, L. (2001). *A reference surface for the unified height system in the northern part of South America*. In: Vistas for Geodesy in the New Millennium. IAG Symposia, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. V. 125: 84 - 89.

Sánchez, L., H. Drewes (2001). *Comparison of the classical and the modern vertical reference system in Colombia*. IAG 2001 Scientific Assembly, Budapest, 02. - 08. 09. In: DGFI Posterübersicht 2000/2001, DGFI, München.

Sánchez, L. (2002). *Untersuchung physikalischer Höhen in Kolumbien*. Studienarbeit. Institut für Planetare Geodäsie, Technische Universität Dresden, November.

- Sandwell, D., W. Smith, (1997). *Marine Gravity Anomaly from Geosat and ERS 1 Satellite Altimetry*. In: Journal of Geophysical Research, V. 103, B5: 10039 – 10054.
- Seeber, G. (1989). *Satellitengeodäsie*. De Gruyter, Berlin, New York.
- Sideris, M. (1990). *Rigorous gravimetric terrain modelling using Molodensky's operator*. Manuscripta geodaetica, 15: 97 - 106.
- SIRGAS (1994). *Sistema de referencia geocéntrico para América del Sur, SIRGAS*. Boletim Informativo No. 1 y No 2, Setembro, Rio de Janeiro.
- Sjöberg, L. (2000). *Topographic effects by the Stokes-Helmert method of geoid and quasi-geoid determinations*. Journal of Geodesy, 74: 255-268.
- Smith, W., D. Sandwell (1997). *Global seafloor topography from satellite altimetry and ship depth soundings*, Science, v. 277, p. 1957-1962
- Smith, D. and D. Roman (2001). *GEOID99 and G99SSS: 1 arc-minute geoid models for the United States*. Journal of Geodesy, 75: 469 – 490
- Tapley, B., M. Kim, S. Poole, M. Cheng, D. Chambers, J. Ries (2001). *The TEG-4 Gravity field model*. AGU Fall 2001. Abstract G51A-0236
- Torge, W. (1975). *Geodesy*. De Gruyter, Berlin, New York.
- Torge, W. (1989). *Gravimetry*. De Gruyter, Berlin, New York.
- Torge, W. (2001). *Geodesy*. 3rd Edition. De Gruyter, Berlin, New York.
- Tscherning, C., R. Forsberg, P. Knudsen (1992). *Description of the GRAVSOFIT package for geoid determination*. In: Holota, P., M. Veermer (Eds.) Proceedings of 1st continental workshop on the geoid in Europe, Prague. Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography, Prague: 327 – 334.
- Tziavos, I., V. Andritsanos (1998). *Recent advances in terrain correction computations*. In M. Vermeer und J. Ádám (eds.): Second continental workshop on the Geoid in Europe. March 10 – 14, Budapest, S. 169-175.
- Wenzel, H. (1985): *Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde*. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover, Heft 137, Hannover.
- Wenzel, H. (1994a). *Earth tide analysis package ETERNA 3.0*. Marees Terr. Bull. d'Inf. Bruxelles, No. 118: 8719 - 8721.
- Wenzel, H. (1994b). *Earth tide data processing ETERNA 3.20*. Marees Terr. Bull. d'Inf. Bruxelles, No. 120: 9019 - 9121.
- Windhauser, U. (1995). *Sphärische Waveletts: Theorie und Anwendung in der Physikalischen Geodäsie*. Dissertation im Fachbereich Mathematik an der Universität Kaiserslautern.

A Datos gravimétricos de referencia en Colombia

A.1 Red gravimétrica SIGNAR de primer orden

Id.	Ciudad	Gravedad [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]	σ_i [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]
900295	ALBAN	977467,852	0,0051
900395	ALBAN	977467,801	0,0084
960396	ARAUCA	978055,907	0,0100
960496	ARAUCA	978055,991	0,0143
960596	ARAUCA	978055,114	0,0139
960196	ARARACUARA	977998,077	0,0124
960296	ARARACUARA	978000,396	0,0151
904195	ARMENIA	977788,350	0,0077
902095	ARMENIA	977788,362	0,0122
902195	ARMENIA	977714,078	0,0121
960696	BAHIA SOLANO	978178,167	0,0114
960796	BAHIA SOLANO	978177,762	0,0148
960896	BAHIA SOLANO	978177,270	0,0148
900197	BARRANCOMINAS	978020,944	0,0134
900297	BARRANCOMINAS	978021,000	0,0164
900397	BARRANCOMINAS	978020,837	0,0164
980195	BOGOTA (Absoluta)	977374,519	0,0004
900195	BOGOTA	977374,717	0,0035
980772	BOGOTA	977380,392	0,0003
902295	BUCARAMANGA	977771,960	0,0114
902395	BUCARAMANGA	977768,769	0,0140
913070	BUENAVENTURA	977981,890	0,0139
960996	BUENAVENTURA	978000,423	0,0113
961096	BUENAVENTURA	977981,594	0,0143
961196	CALI	977829,681	0,0092
961296	CALI	977802,471	0,0134
961396	CALI	977823,490	0,0139
980395	CARTAGENA (Absoluta)	978142,253	0,0033
900895	CARTAGENA	978143,362	0,0029
915570	CARTAGENA	978178,946	0,0063
900497	CAUCASIA	978070,191	0,0089
900597	CAUCASIA	978070,056	0,0130
900697	CAUCASIA	978071,690	0,0130
914770	CUCUTA	977957,489	0,0089
902495	CUCUTA	977957,243	0,0130
902595	CUCUTA	977951,012	0,0130
900797	FLORENCIA	977931,202	0,0127
900897	FLORENCIA	977931,159	0,0161
900997	FLORENCIA	977919,565	0,0159
980295	HONDA (Absoluta)	977928,129	0,0015
900695	HONDA	977928,189	0,0029
900795	HONDA	977923,702	0,0047
901395	IPIALES	977303,706	0,0135
901495	IPIALES	977276,174	0,0130
961496	IPIALES	977238,153	0,0116
961796	LA PEDRERA	978040,421	0,0142
961896	LA PEDRERA	978041,106	0,0165
961596	LA CHORRERA	978041,968	0,0142
961696	LA CHORRERA	978042,114	0,0166
961996	LETICIA	978050,074	0,0112
962096	LETICIA	978049,880	0,0146
962196	LETICIA	978049,971	0,0146

Id.	Ciudad	Gravedad [$10^{-5} \mu\text{ms}^{-2}$]	σ_i [$10^{-5} \mu\text{ms}^{-2}$]
902695	MAICAO	978216,958	0,0131
902795	MAICAO	978216,902	0,0154
958267	MEDELLIN	977740,616	0,0079
902895	MEDELLIN	977611,361	0,0071
902995	MEDELLIN	977611,579	0,0108
901097	MIRAFLORES	978027,506	0,0128
901197	MIRAFLORES	978025,624	0,0152
962296	MITU	977997,530	0,0134
962396	MITU	977998,048	0,0167
962496	MITU	977997,963	0,0174
916570	MOMPOS	978116,825	0,0076
903095	MOMPOS	978116,797	0,0121
903195	MOMPOS	978120,229	0,0121
901297	NEIVA	977767,756	0,0128
916170	NEIVA	977767,409	0,0090
916270	NEIVA	977767,521	0,0123
901397	OROCUE	977997,093	0,0111
901497	OROCUE	977997,017	0,0146
901597	OROCUE	977998,318	0,0146
903295	PAIPA	977460,244	0,0099
903395	PAIPA	977460,242	0,0137
903495	PAIPA	977455,252	0,0137
960558	PASTO	977585,732	0,0278
901195	PASTO	977585,716	0,0125
901295	PASTO	977535,196	0,0175
962596	PUERTO ASIS	977927,631	0,0109
962696	PUERTO ASIS	977927,650	0,0144
962796	PUERTO ASIS	977928,317	0,0144
901697	PUERTO CARREÑO	978061,429	0,0119
901797	PUERTO CARREÑO	978060,855	0,0152
901897	PUERTO CARREÑO	978062,667	0,0152
962896	PUERTO INIRIDA	978019,076	0,0132
962996	PUERTO INIRIDA	978020,098	0,0162
963096	PUERTO INIRIDA	978018,983	0,0162
963196	PUERTO LEGUIZAMO	977994,358	0,0133
963296	PUERTO LEGUIZAMO	977994,956	0,0164
963396	PUERTO LEGUIZAMO	977996,407	0,0166
913770	SAN ANDRES	978385,701	0,0119
963596	SAN ANDRES	978382,430	0,0153
963496	SAN ANDRES	978384,996	0,0152
901997	SAN JOSE DEL GUAVIAR	978041,787	0,0126
902097	SAN JOSE DEL GUAVIAR	978042,462	0,0159
902197	SAN JOSE DEL GUAVIAR	978041,205	0,0158
903595	SANTA MARTA	978318,168	0,0094
903695	SANTA MARTA	978317,478	0,0133
903795	SANTA MARTA	978345,350	0,0134
963696	TAME	977943,173	0,0113
963796	TAME	977942,376	0,0147
963896	TAME	977947,570	0,0147
913370	TUMACO	978035,422	0,0127
913470	TUMACO	978026,249	0,0150
913570	TUMACO	978027,472	0,0175
963996	TUMACO	978035,221	0,0157
964096	TURBO	978097,671	0,0123
964196	TURBO	978097,676	0,0155
964296	TURBO	978093,169	0,0155
903895	VALLEDUPAR	978221,529	0,0083

Id.	Ciudad	Gravedad [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]	σ_i [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]
903995	VALLEDUPAR	978221,320	0,0125
904095	VALLEDUPAR	978223,461	0,0125
914170	VILLAVICENCIO	977852,531	0,0084
964396	VILLAVICENCIO	977852,642	0,0126
964496	VILLAVICENCIO	977842,633	0,0126
900495	VILLETA	977776,287	0,0047
900595	VILLETA	977776,177	0,0101

A.2 Red gravimétrica SIGNAR de segundo orden

Id.	Ciudad	Gravedad [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]	σ_i [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]
914270	APIAY	977872,008	0,0206
914570	ARAUCA	978054,793	0,0172
916070	ARAUCA	978055,118	0,0255
916370	AGUACHICA	978037,607	0,0184
915870	BARRANCA	977972,315	0,0138
912049	BARRANQUILLA	978211,589	0,0134
912149	BARRANQUILLA	978224,310	0,0336
916770	BARRANQUILLA	978211,519	0,0231
952667	BARRANQUILLA	978228,459	0,0456
902749	BOGOTA	977389,989	0,0149
902849	BOGOTA	977390,081	0,0143
902949	BOGOTA	977386,861	0,0335
903049	BOGOTA	977380,548	0,0131
916870	BOGOTA	977380,570	0,0220
961967	BOGOTA	977390,110	0,0158
980772	BOGOTA	977380,332	0,0119
980872	BOGOTA	977380,296	0,0171
915970	BUCARAMANGA	977827,956	0,0168
912970	BUENAVENTURA	977980,162	0,0216
913170	BUENAVENTURA	978000,500	0,0245
913270	BUENAVENTURA	978000,494	0,0241
965663	CALI	977804,870	0,0116
990467	CALI	977845,542	0,0287
915370	CARTAGENA	978181,357	0,0162
915470	CARTAGENA	978179,205	0,0162
915570	CARTAGENA	978178,916	0,0068
915670	COROZAL	978145,261	0,0235
914670	CUCUTA	977957,538	0,0119
916470	EL BANCO	978137,107	0,0173
912270	FUSAGASUGA	977554,859	0,0351
912470	GIRARDOT	977866,880	0,0230
912570	IBAGUE	977761,228	0,0229
912170	LA AGUADITA	977514,022	0,0298
912370	LINE	977854,339	0,0404
916670	MAGANGUE	978121,078	0,0156
915070	MAICAO	978216,843	0,0197
903149	MEDELLIN	977741,165	0,0157
915770	MONTERIA	978163,845	0,0182
960558	PASTO	977585,732	0,0278
902449	POPAYAN	977584,426	0,0182

Id.	Ciudad	Gravedad [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]	σ_i [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]
965467	POPAYAN	977584,449	0,0142
914370	PUERTO CARRENO	978061,543	0,0213
915170	RIOHACHA	978192,919	0,0248
913670	SAN ANDRES	978381,970	0,0171
913870	SAN ANDRES	978382,963	0,0254
914870	SANTA MARTA	978318,313	0,0169
912070	SIBATE	977382,198	0,0241
914470	TAME	977943,586	0,0216
913970	TURBO	978097,695	0,0213
915270	VALLEDUPAR	978221,592	0,0231
914070	VILLAVICENCIO	977839,672	0,0143

A.3 Red gravimétrica RED58

Id.	Ciudad	Gravedad [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]	σ_i [$10^{-5}\mu\text{ms}^{-2}$]
960158	BARBOSA	977668,506	0,041
960258	CALI	977826,041	0,200
960358	EL DIFICIL	978113,620	0,127
960458	IPIALES	977932,521	0,213
960558	PASTO	977585,747	0,023
960658	PEREIRA	977756,944	0,136
960758	PLANETA RICA	978100,095	0,195
960958	QUIBDO	978034,164	0,204
961058	SAN GIL	977685,028	0,038
961158	TIBU	978091,491	0,141
962159	AYACUCHO	978108,558	0,167
962259	FLORENCIA	977931,786	0,174
962359	FUNDACION	978174,078	0,254
962459	LA JAGUA	977733,253	0,161
962559	LA PEDRERA	978037,558	0,744
962659	LETICIA	978050,006	0,511
962759	MITU	977996,713	0,233
962859	PUERTO LEGUIZAMO	977996,193	0,321
962959	TARAPACA	978044,776	0,577
963059	TRES ESQUINAS	977990,260	0,221
964160	AGUAZUL	977904,338	0,194
964260	GAMARRA	978037,996	0,199
964360	PAIPA	977460,124	0,061
964460	PALANQUERO	977949,713	0,203
964560	PUERTO BERRIO	978016,650	0,202
964660	OROCUE	977999,120	0,215
964760	SAN JOSE DEL GUAVIARE	978041,317	0,186
965663	CALI APTO	977804,869	0,011

A.4 Factores de escala de los equipos utilizados en la medición de las líneas gravimétricas

Gravímetro	Intervalo [10^{-5} ms^{-2}]			Red
	9770 400 - 977 700	977 700 - 978 000	978 000 - 978 400	
W32	$0,99944 \pm 4,51\text{E-}04$	$0,99609 \pm 2,87\text{E-}04$	$0,96896 \pm 2,67\text{E-}03$	W
		$0,99703 \pm 7,54\text{E-}04$		SW
			$0,99380 \pm 6,39\text{E-}03$	NEa
		$0,99810 \pm 6,33\text{E-}03$	$1,01495 \pm 6,89\text{E-}03$	Ea
W682			$1,00684 \pm 2,17\text{E-}03$	W
W147	$0,99845 \pm 3,27\text{E-}04$	$0,99497 \pm 9,82\text{E-}04$		NEa
		$1,02496 \pm 2,47\text{E-}02$		Ea
			$1,01205 \pm 3,10\text{E-}03$	W
W106	$0,99270 \pm 5,46\text{E-}04$			NEa
W1342		$1,00081 \pm 2,03\text{E-}03$		Ea
LCR11	$0,99983 \pm 1,03\text{E-}05$			
LCR46	$0,99955 \pm 3,51\text{E-}5$			
LCR67	$1,0010 \pm 1,01\text{E-}5$			

A.5 Deriva de los equipos utilizados en la medición de las líneas gravimétricas

Gravímetro	Intervalo [10^{-5} ms^{-2}]			Red
	9770 400 - 977 700	977 700 - 978 000	978 000 - 978 400	
W32B	$0,02648 \pm 2,98\text{E-}03$	$-0,04439 \pm 2,26\text{E-}03$	$0,01319 \pm 2,44\text{E-}03$	W
	$-0,17239 \pm 1,62\text{E-}02$	$-0,54032 \pm 2,13\text{E-}02$		SW
	$-0,00836 \pm 5,70\text{E-}03$	$-0,06124 \pm 3,86\text{E-}03$	$-0,05216 \pm 5,17\text{E-}03$	Nea
			$-0,00302 \pm 6,95\text{E-}03$	Neb
	$0,08784 \pm 1,22\text{E-}02$	$0,06574 \pm 7,52\text{E-}03$		Ea
	$-0,04266 \pm 1,41\text{E-}02$	$0,10237 \pm 3,24\text{E-}02$	$0,01277 \pm 4,28\text{E-}02$	RED58
			$0,00827 \pm 4,20\text{E-}03$	NW
W397	$-0,00726 \pm 4,28\text{E-}03$	$0,05805 \pm 2,07\text{E-}03$	$0,05725 \pm 4,53\text{E-}03$	W
		$0,16699 \pm 1,16\text{E-}02$	$0,07781 \pm 6,49\text{E-}03$	SW
	$0,04917 \pm 5,02\text{E-}03$	$0,17173 \pm 3,69\text{E-}02$	$-0,02380 \pm 3,79\text{E-}02$	Nea
			$0,02480 \pm 9,14\text{E-}03$	Neb
		$0,42958 \pm 4,12\text{E-}02$	$0,13282 \pm 4,25\text{E-}02$	Ea
			$0,07336 \pm 1,45\text{E-}02$	NW
	$-0,06175 \pm 1,39\text{E-}01$	$0,13208 \pm 5,04\text{E-}02$	$-0,00476 \pm 5,48\text{E-}02$	RED58
W32	$0,09466 \pm 1,18\text{E-}02$	$0,05297 \pm 2,51\text{E-}03$	$-0,03683 \pm 1,46\text{E-}02$	W
		$0,20917 \pm 1,33\text{E-}02$		SW
		$0,01390 \pm 4,53\text{E-}03$	$0,03646 \pm 8,27\text{E-}03$	Ea
			$0,13584 \pm 1,50\text{E-}02$	Eb
	$-0,08279 \pm 1,55\text{E-}02$	$0,01908 \pm 1,56\text{E-}02$	$-0,06556 \pm 3,94\text{E-}02$	NEa
			$0,03879 \pm 8,93\text{E-}03$	NEb
W682	$-0,03881 \pm 3,86\text{E-}03$			W
W147			$-0,04875 \pm 2,35\text{E-}02$	W
	$-0,01401 \pm 3,83\text{E-}03$	$0,02618 \pm 6,23\text{E-}03$		NEa
		$0,01160 \pm 1,23\text{E-}02$		Ea
W106	$0,05964 \pm 6,39\text{E-}03$			NEa
W1342		$0,08089 \pm 2,07\text{E-}02$		Ea
LCR11		$-0,00718 \pm 1,17\text{E-}03$		W
		$-0,01554 \pm 2,38\text{E-}03$		SW
		$-0,01225 \pm 1,35\text{E-}03$		NEa
		$-0,01056 \pm 2,68\text{E-}03$		Ea
LCR46		$-0,00329 \pm 1,11\text{E-}03$		W
		$-0,00910 \pm 2,64\text{E-}03$		NEa
LCR67		$-0,02269 \pm 2,69\text{E-}02$		W
		$0,00141 \pm 1,73\text{E-}03$		NEa
		$-0,00560 \pm 1,96\text{E-}03$		Ea

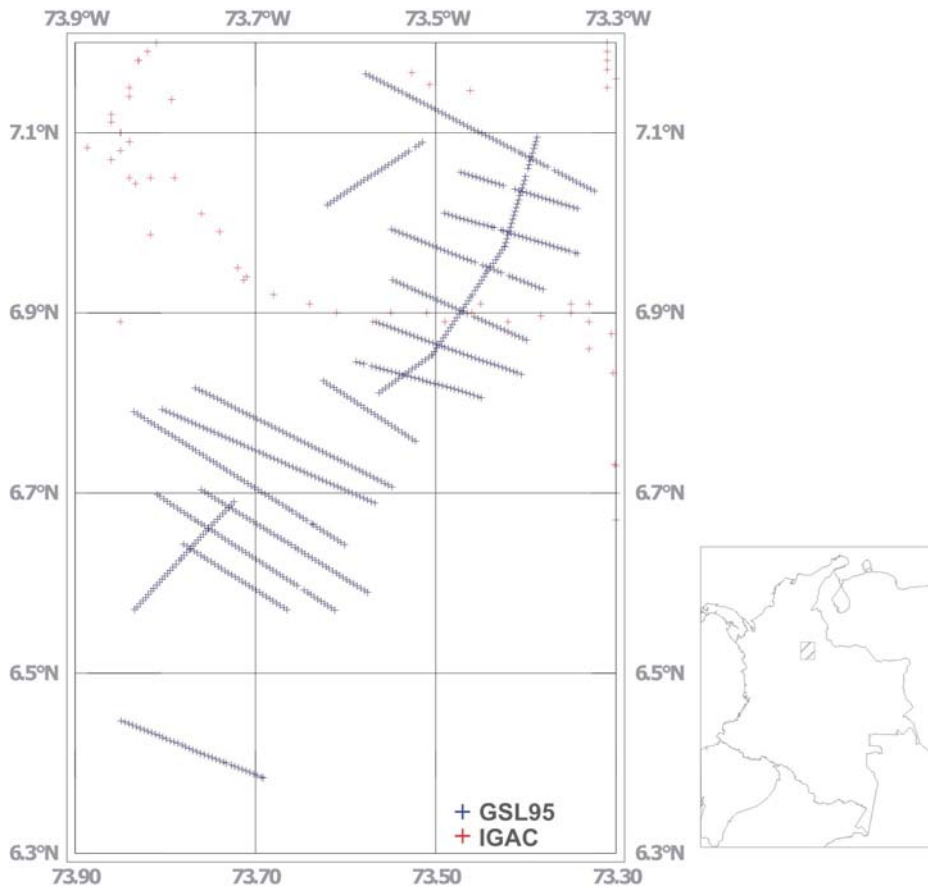
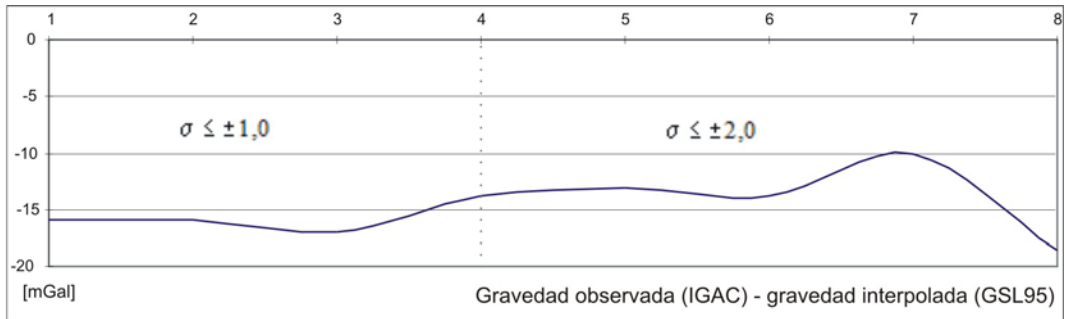
B Depuración de los datos gravimétricos cedidos por ECOPETROL

B.1 Proyecto GSL95

Número de puntos: 773
 Año de medición: 1995
 Datum gravimétrico: POTSDAM
 Corrección aplicada a los valores de gravedad: -15,640 mGal

Promedio de las diferencias entre el valor de gravedad observado por el IGAC y su equivalente interpolado a partir de los valores del proyecto GSL95:

Varianza de los valores interpolados	Número de puntos	Promedio de las diferencias
$\pm 2,0 \leq \sigma \leq \pm 3,0$	4	-15,640 mGal
$\pm 2,0 \leq \sigma \leq \pm 4,0$	8	-14,745 mGal

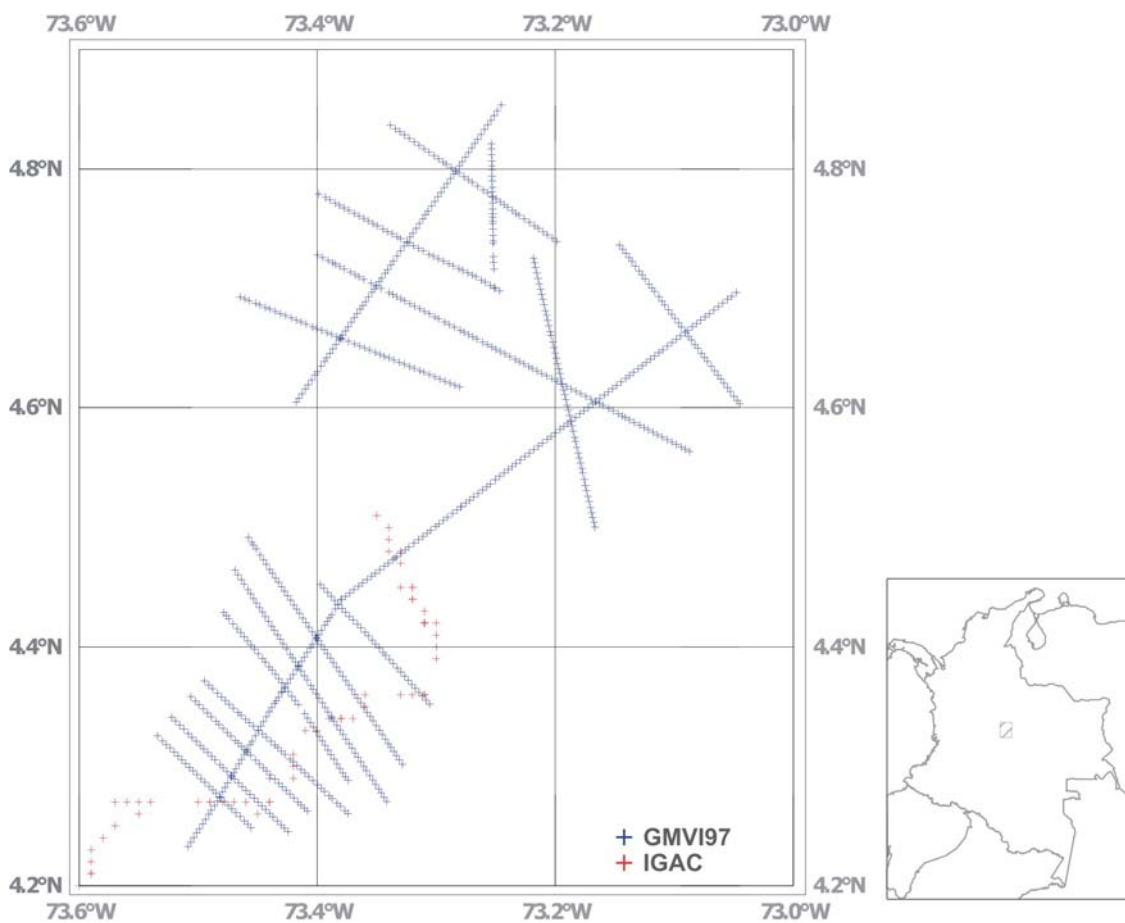
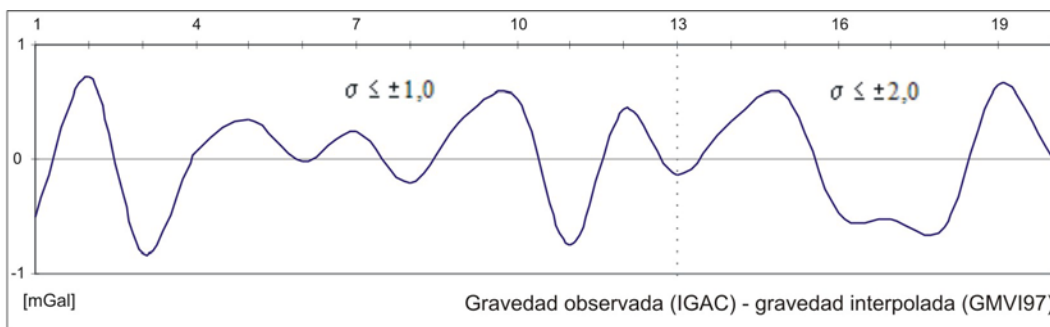


B.2 Proyecto GMVI97

Número de puntos: 845
 Año de medición: 1997
 Datum gravimétrico: IGSN71 (IAGBN)
 Corrección aplicada a los valores de gravedad: Ninguna

Promedio de las diferencias entre el valor de gravedad observado por el IGAC y su equivalente interpolado a partir de los valores del proyecto GMVI97:

Varianza de los valores interpolados	Número de puntos	Promedio de las diferencias
$\pm 0,0 \leq \sigma \leq \pm 1,0$	13	-0,021 mGal
$\pm 0,0 \leq \sigma \leq \pm 2,0$	20	-0,012 mGal

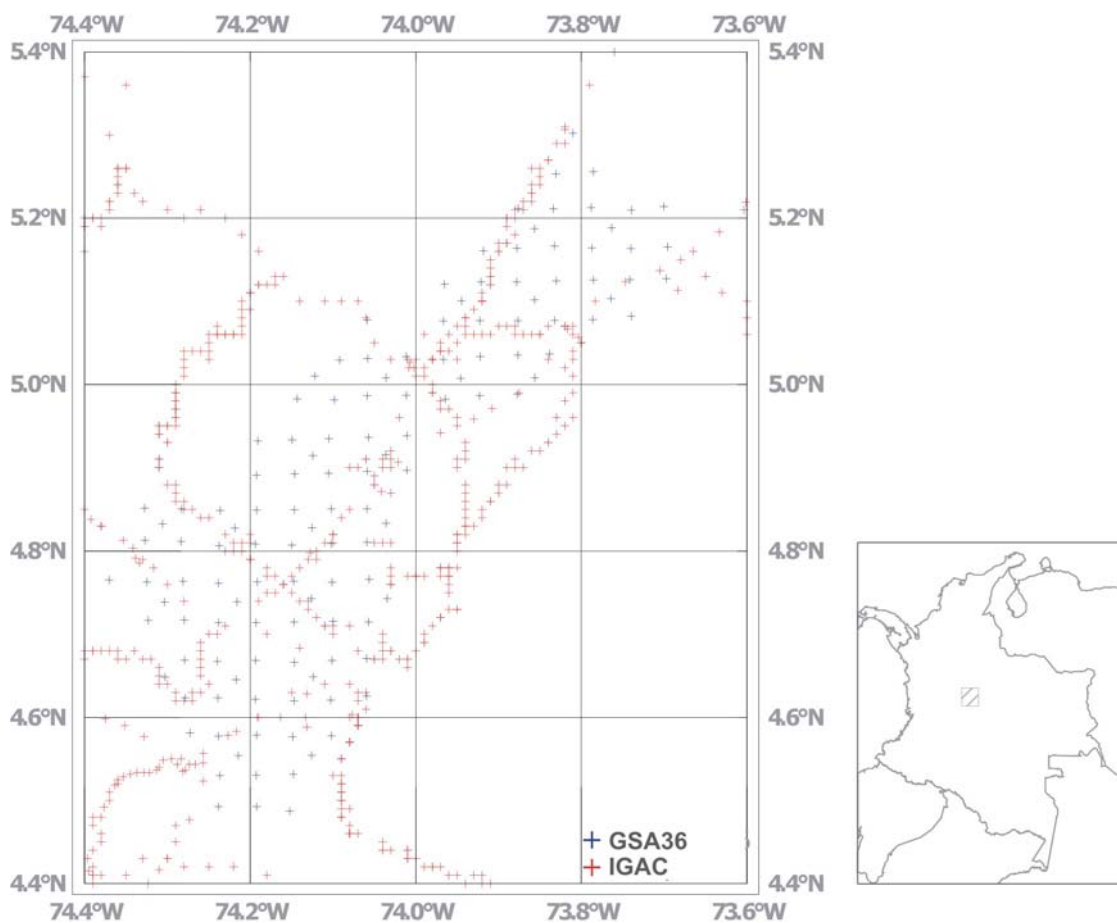
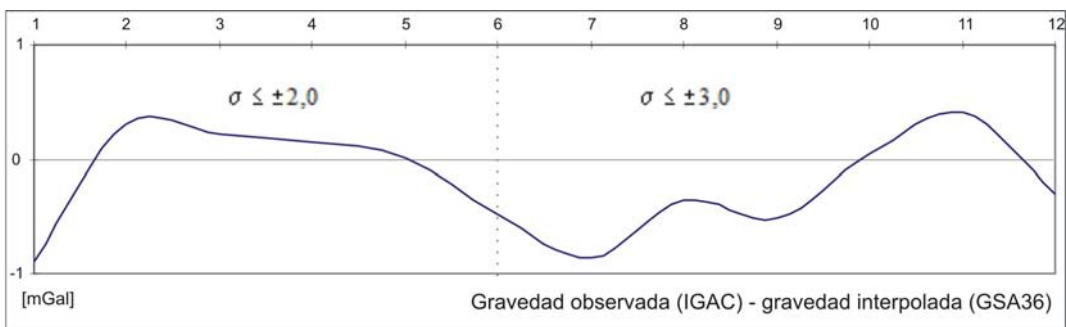


B.3 Proyecto GSA36

Número de puntos: 128
 Año de medición: 1969
 Datum gravimétrico: IGSN71 (IAGBN)
 Corrección aplicada a los valores de gravedad: Ninguna

Promedio de las diferencias entre el valor de gravedad observado por el IGAC y su equivalente interpolado a partir de los valores del proyecto GSA36:

Varianza de los valores interpolados	Número de puntos	Promedio de las diferencias
$\pm 0,0 \leq \sigma \leq \pm 1,0$	6	-0,115 mGal
$\pm 0,0 \leq \sigma \leq \pm 2,0$	12	-0,170 mGal

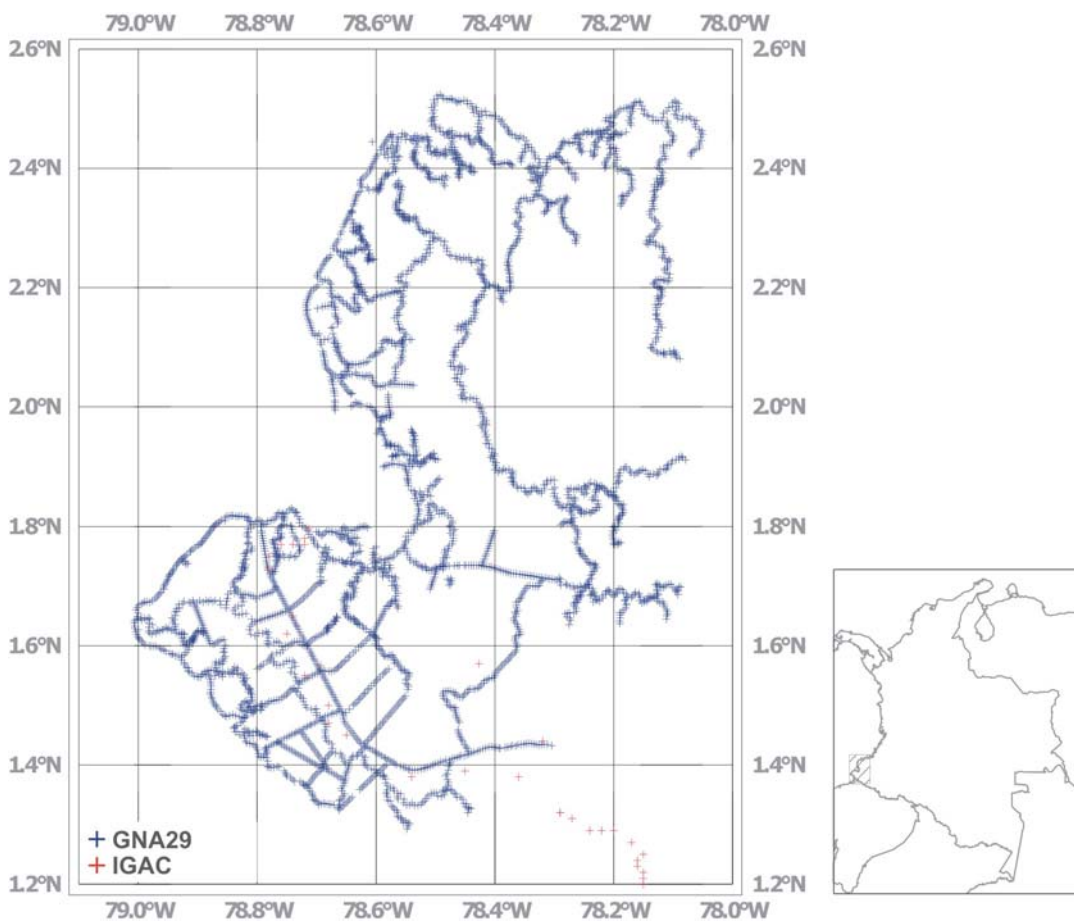
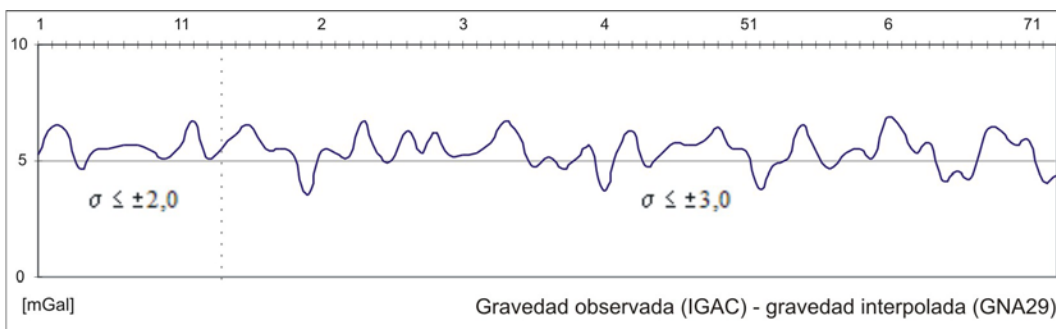


B.4 Proyecto GNA29

Número de puntos: 557
 Año de medición: 1970
 Datum gravimétrico: IGSN71 (?)
 Corrección aplicada a los valores de gravedad: -5,763 mGal

Promedio de las diferencias entre el valor de gravedad observado por el IGAC y su equivalente interpolado a partir de los valores del proyecto GNA29:

Varianza de los valores interpolados	Número de puntos	Promedio de las diferencias
$\pm 0,0 \leq \sigma \leq \pm 2,0$	14	+5,763 mGal
$\pm 0,0 \leq \sigma \leq \pm 3,0$	73	+5,457 mGal

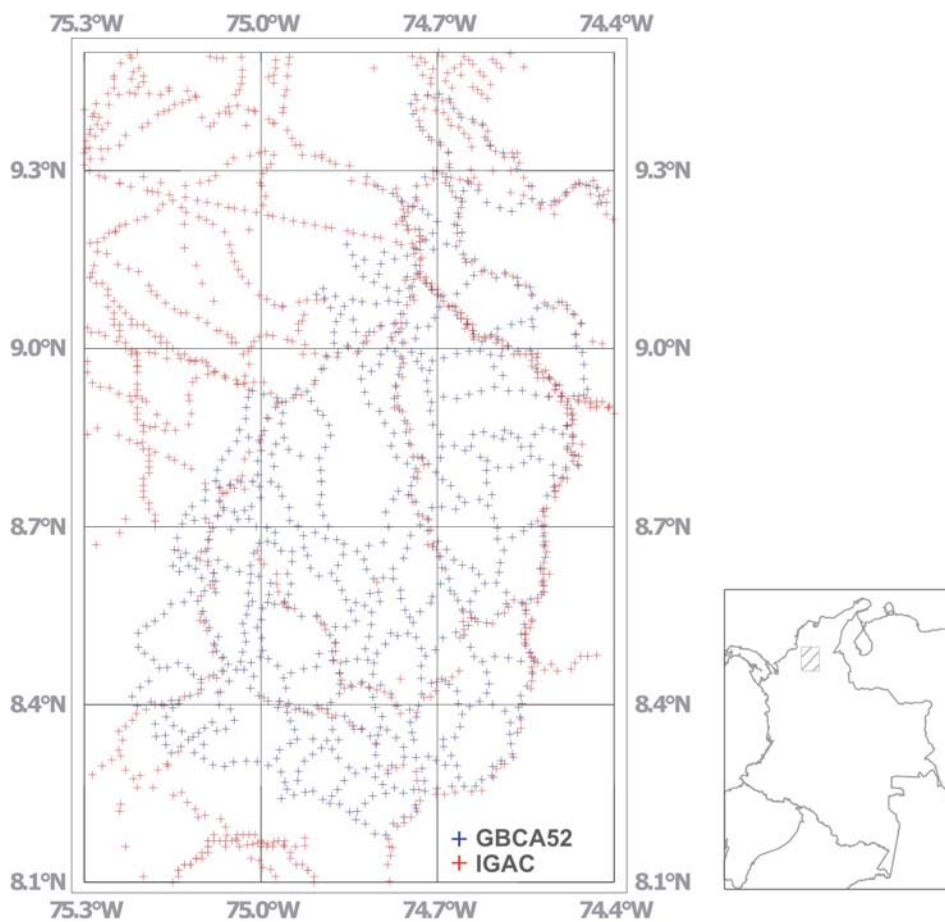
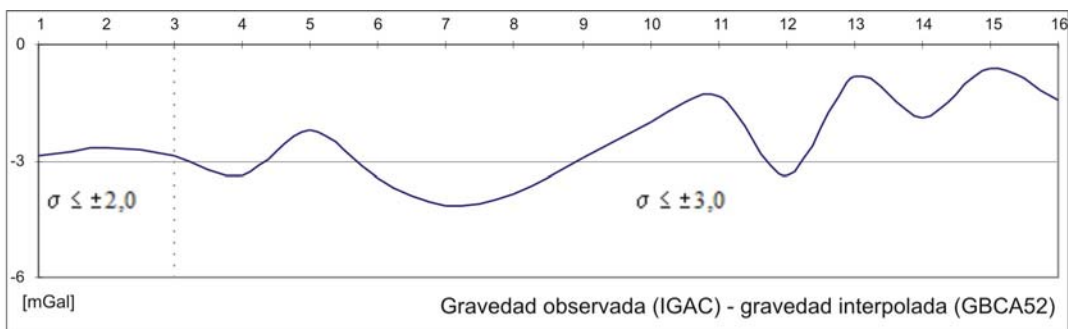


B.5 Proyecto GBCA52

Número de puntos: 774
 Año de medición: 1970
 Datum gravimétrico: IGSN71 (?)
 Corrección aplicada a los valores de gravedad: -2,800 mGal

Promedio de las diferencias entre el valor de gravedad observado por el IGAC y su equivalente interpolado a partir de los valores del proyecto GBCA52:

Varianza de los valores interpolados	Número de puntos	Promedio de las diferencias
$\pm 0,0 \leq \sigma \leq \pm 1,0$	3	-2,800 mGal
$\pm 0,0 \leq \sigma \leq \pm 2,0$	16	-2,480 mGal

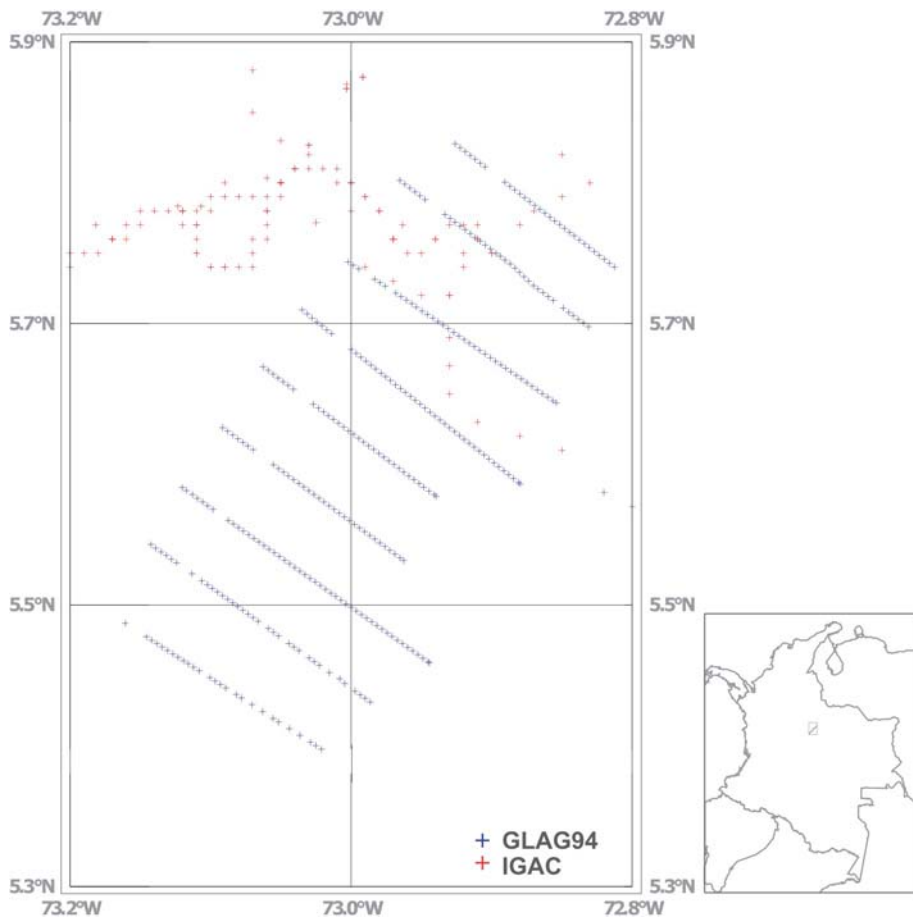
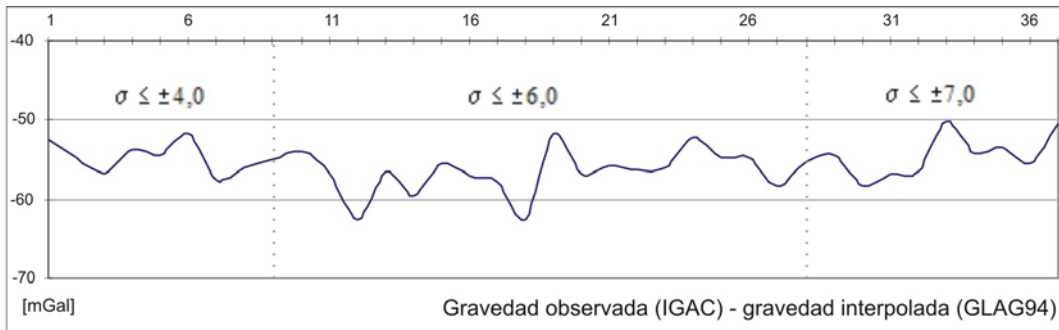


B.6 Proyecto GLAG94

Número de puntos: 347
 Año de medición: 1994
 Datum gravimétrico: Desconocido
 Corrección aplicada a los valores de gravedad: -55,603 mGal

Promedio de las diferencias entre el valor de gravedad observado por el IGAC y su equivalente interpolado a partir de los valores del proyecto GLAG94:

Varianza de los valores interpolados	Número de puntos	Promedio de las diferencias
$\pm 3,0 \leq \sigma \leq \pm 4,0$	9	-54,750 mGal
$\pm 3,0 \leq \sigma \leq \pm 6,0$	27	-55,909 mGal
$\pm 3,0 \leq \sigma \leq \pm 7,0$	37	-55,603 mGal

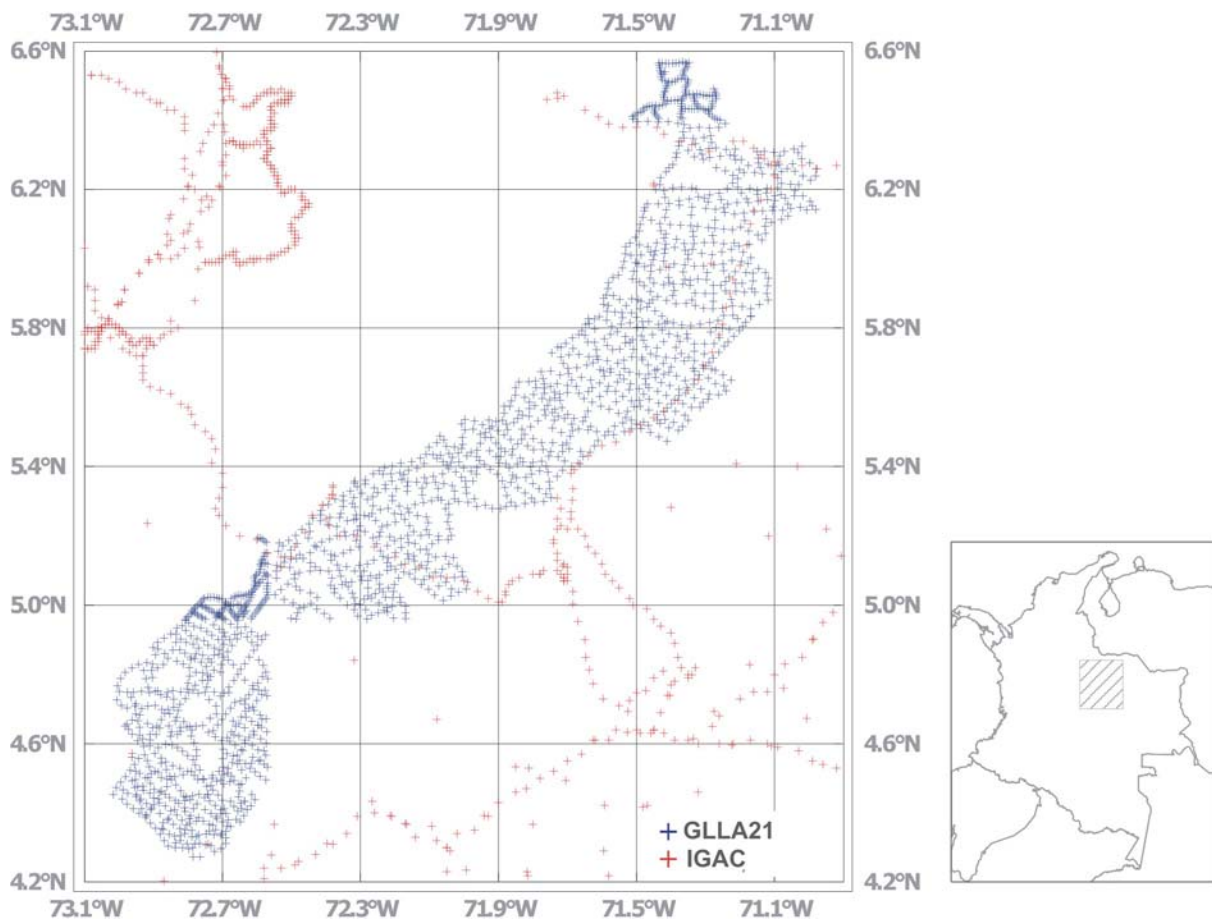
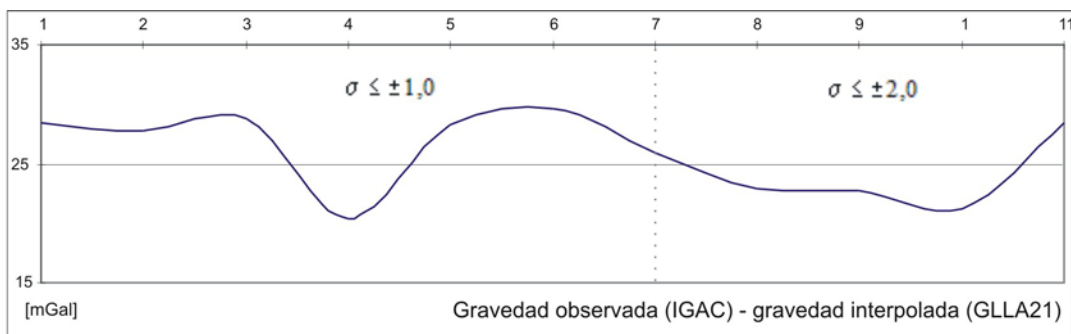


B.7 Proyecto GLLA21

Número de puntos: 1775
 Año de medición: 1968
 Datum gravimétrico: Desconocido
 Corrección aplicada a los valores de gravedad: +27,034 mGal

Promedio de las diferencias entre el valor de gravedad observado por el IGAC y su equivalente interpolado a partir de los valores del proyecto GLLA21:

Varianza de los valores interpolados	Número de puntos	Promedio de las diferencias
$\pm 3,0 \leq \sigma \leq \pm 4,0$	7	+27,034 mGal
$\pm 3,0 \leq \sigma \leq \pm 6,0$	11	+25,877 mGal

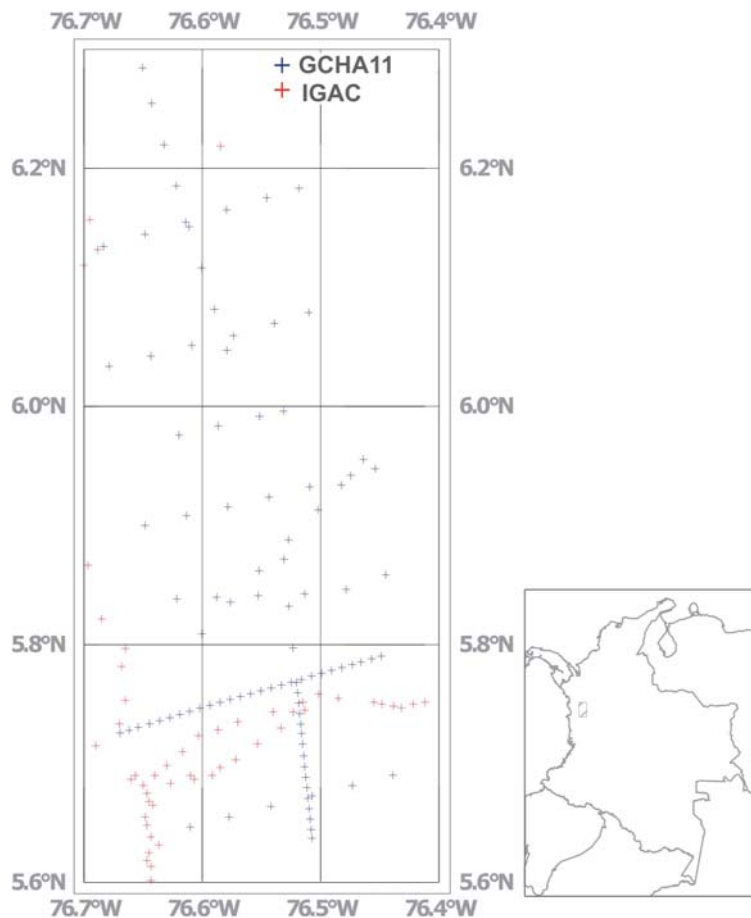
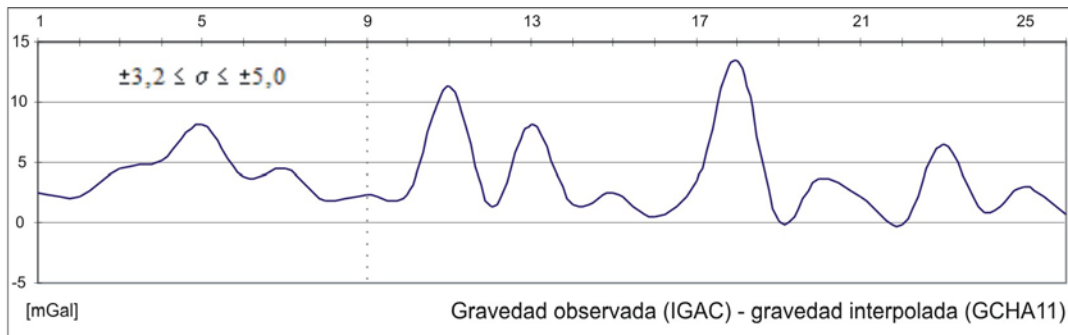


B.8 Proyecto GCHA11

Número de puntos: 96
 Año de medición: 1982
 Datum gravimétrico: Desconocido
 Corrección aplicada a los valores de gravedad: No determinable

Promedio de las diferencias entre el valor de gravedad observado por el IGAC y su equivalente interpolado a partir de los valores del proyecto GCHA11:

Varianza de los valores interpolados	Número de puntos	Promedio de las diferencias
$\pm 3,0 \leq \sigma \leq \pm 4,0$	9	+4,692 mGal
$\pm 3,0 \leq \sigma \leq \pm 6,0$	26	+3,536 mGal

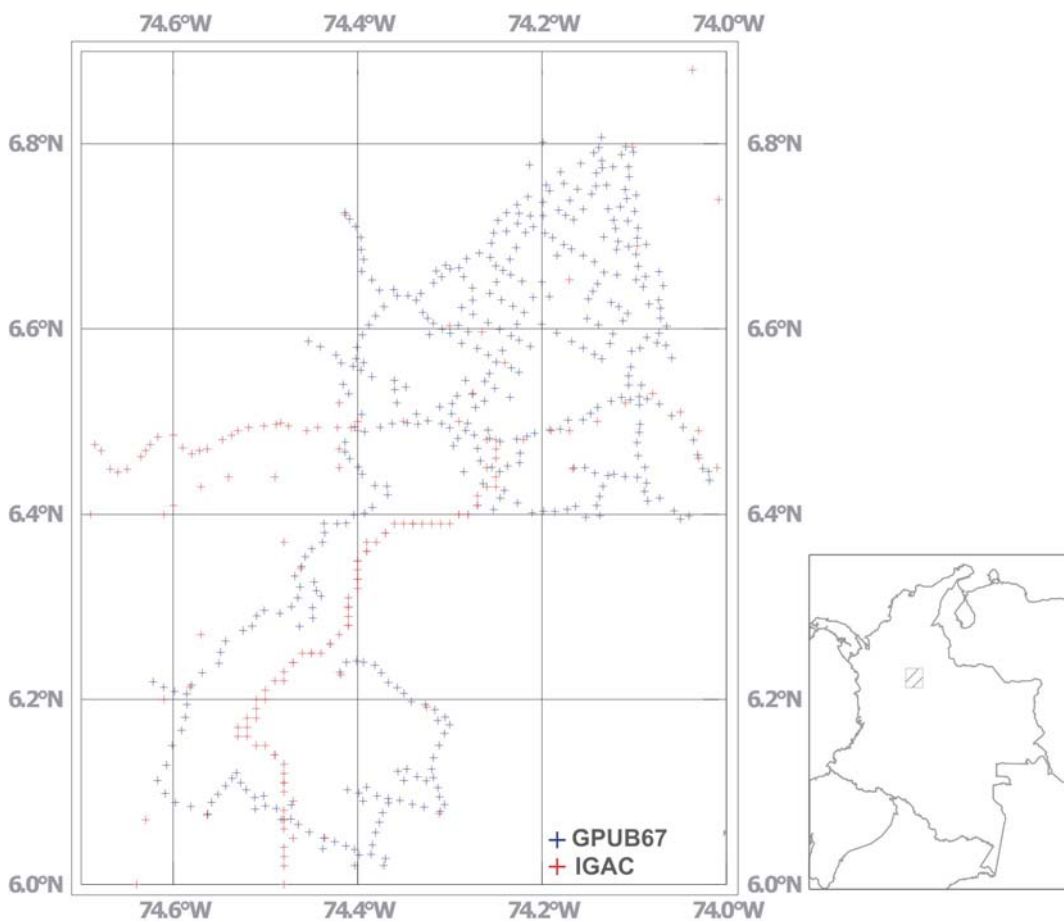
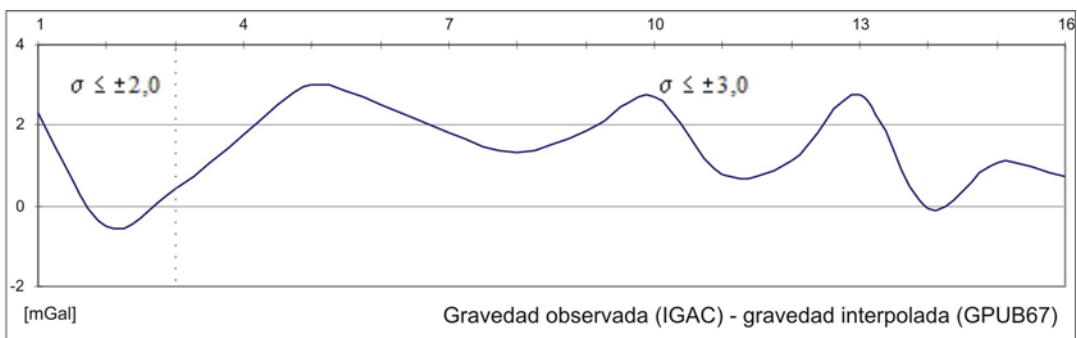


B.9 Proyecto GPUB67

Número de puntos: 409
 Año de medición: 1956
 Datum gravimétrico: Desconocido
 Corrección aplicada a los valores de gravedad: No determinable

Promedio de las diferencias entre el valor de gravedad observado por el IGAC y su equivalente interpolado a partir de los valores del proyecto GPUB67:

Varianza de los valores interpolados	Número de puntos	Promedio de las diferencias
$\pm 3,0 \leq \sigma \leq \pm 4,0$	3	+0,472 mGal
$\pm 3,0 \leq \sigma \leq \pm 6,0$	16	+1,477 mGal



C Comparación de los modelos globales de gravedad EGM96, TEG-4 y EIGEN-2 con las anomalías regionales

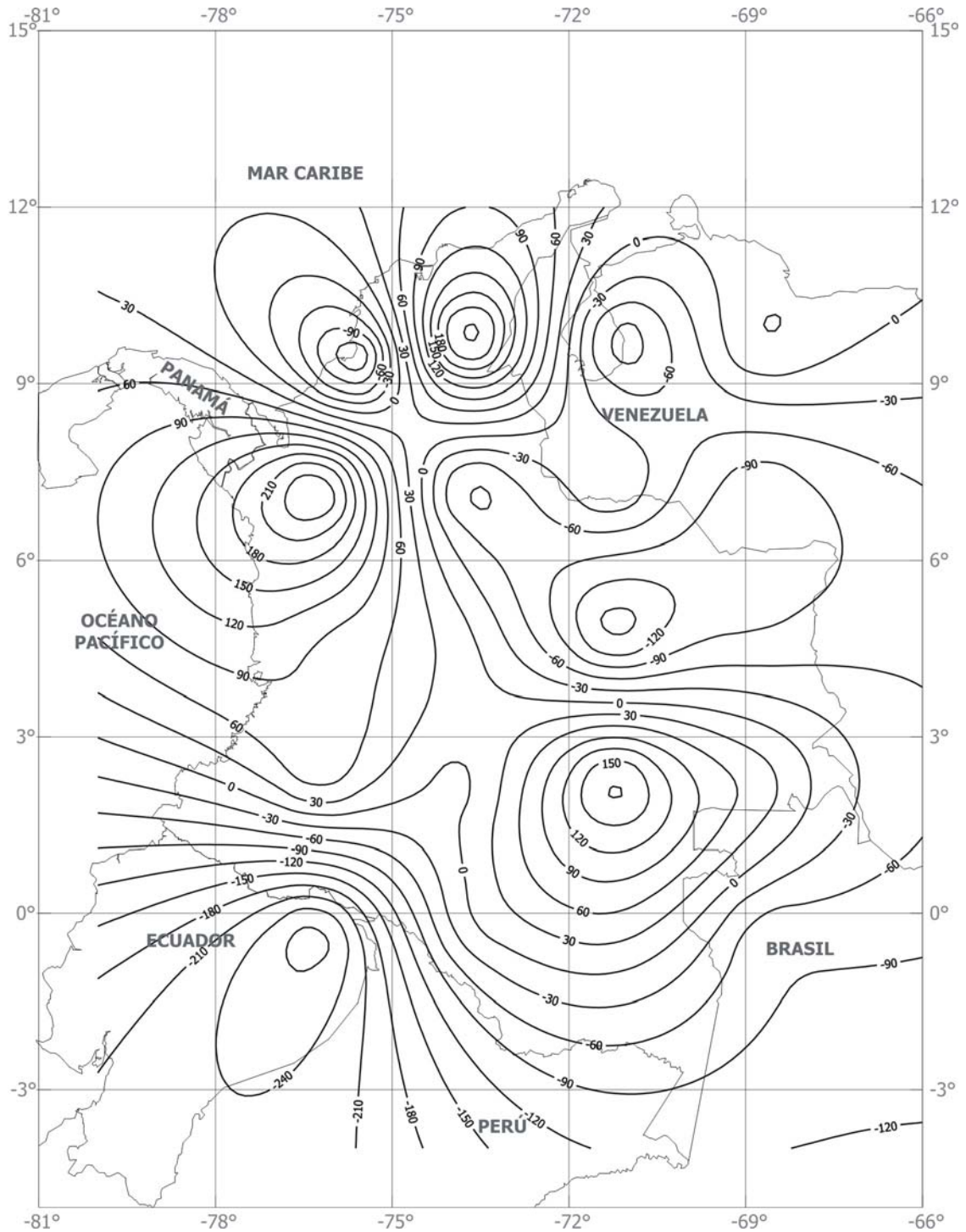


Figura C.1 Diferencias entre las anomalías medias ($2,5^{\circ} \times 2,5^{\circ}$) de los modelos globales de gravedad EGM96 y EIGEN-2 [μms^{-2}]

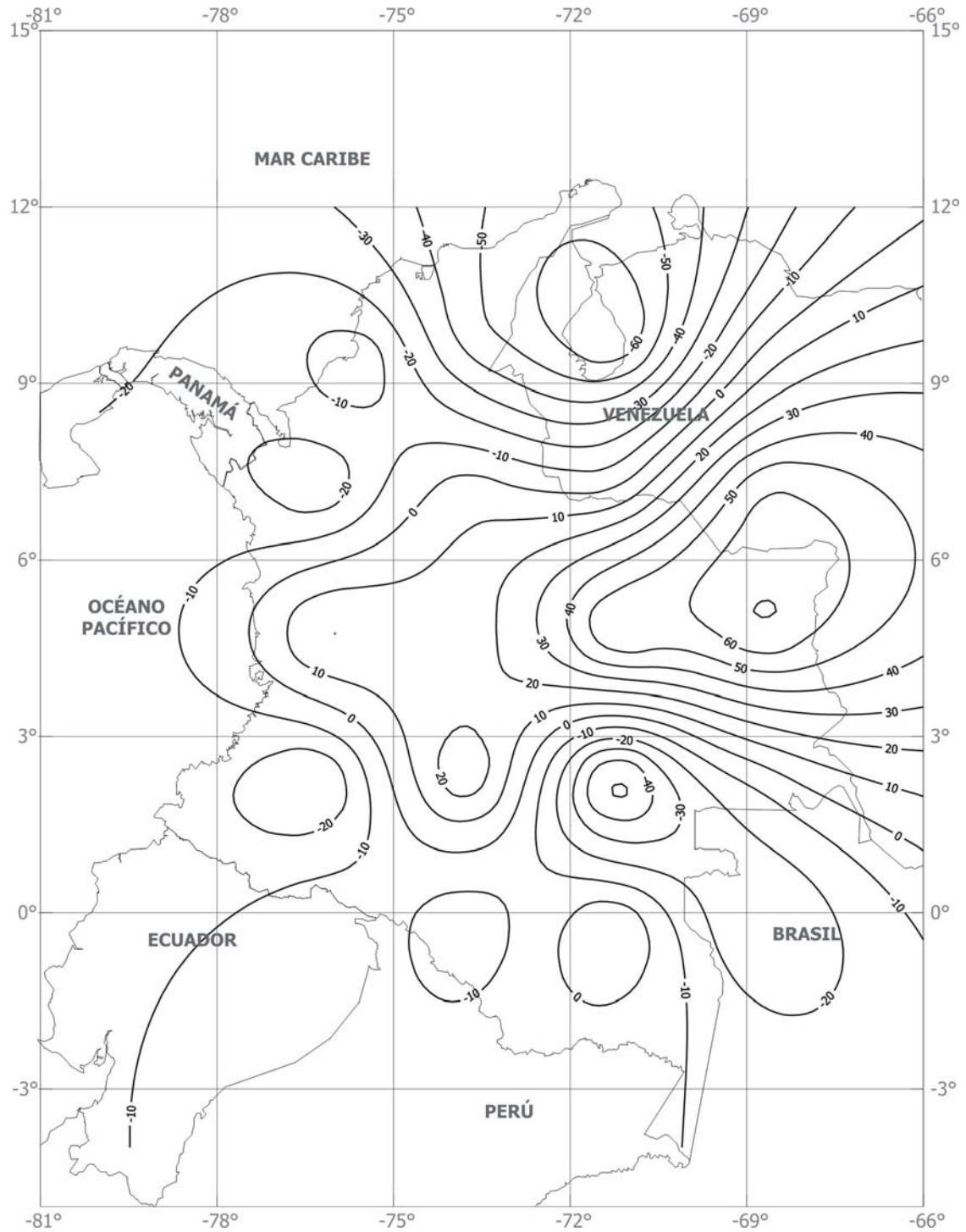


Figura C.2 Diferencias entre las anomalías medias ($2,5^{\circ} \times 2,5^{\circ}$) de los modelos globales de gravedad TEG-4 y EGM96 [μms^{-2}]

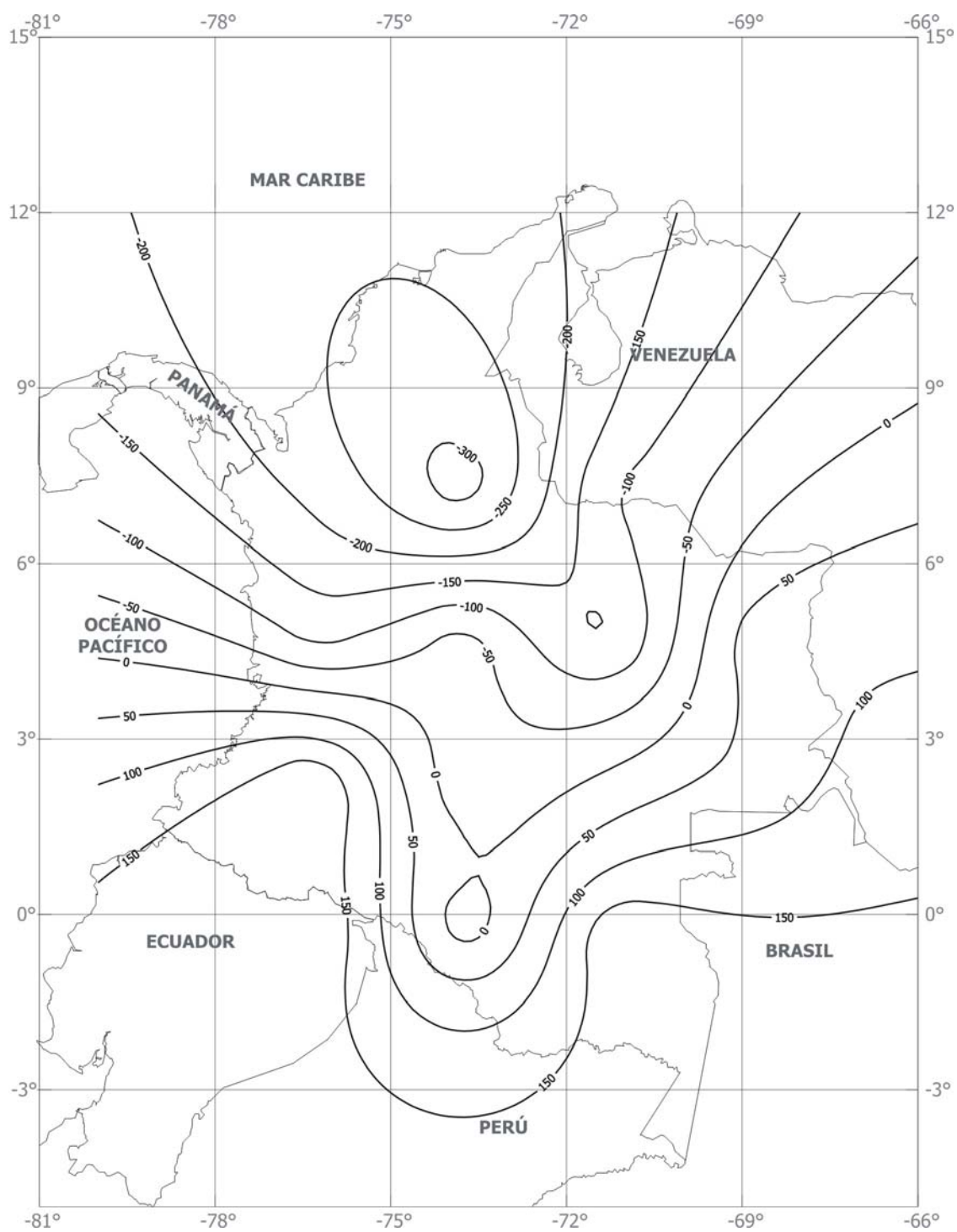


Figura C.3 Diferencias entre las anomalías Aire Libre regionales (2,5°x2,5°) y las derivadas del modelo EGM96 [μms^{-2}]

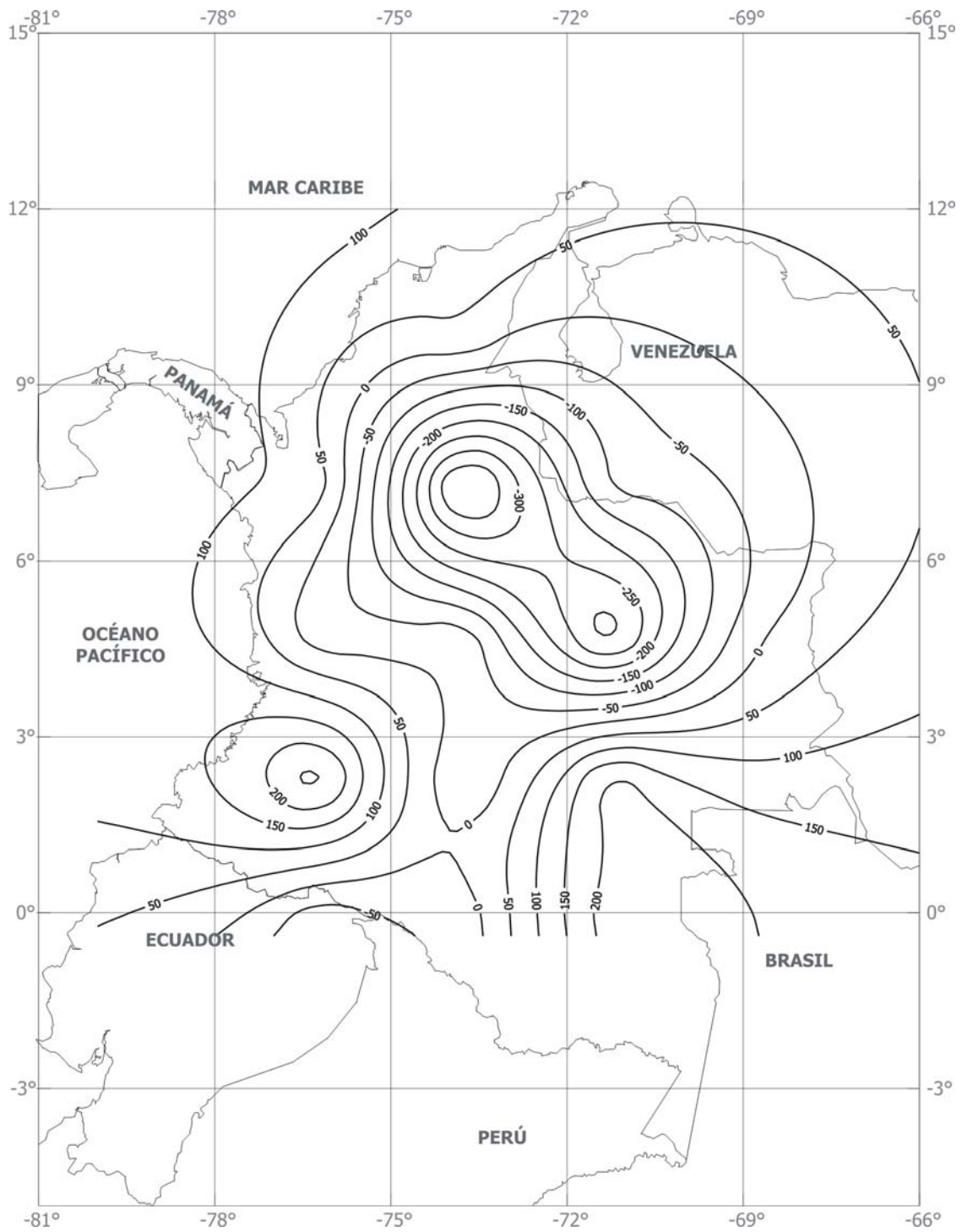


Figura C.4 Diferencias entre las anomalías aire libre regionales ($2,5^\circ \times 2,5^\circ$) y las derivadas del modelo EIGEN-2 [μms^{-2}]

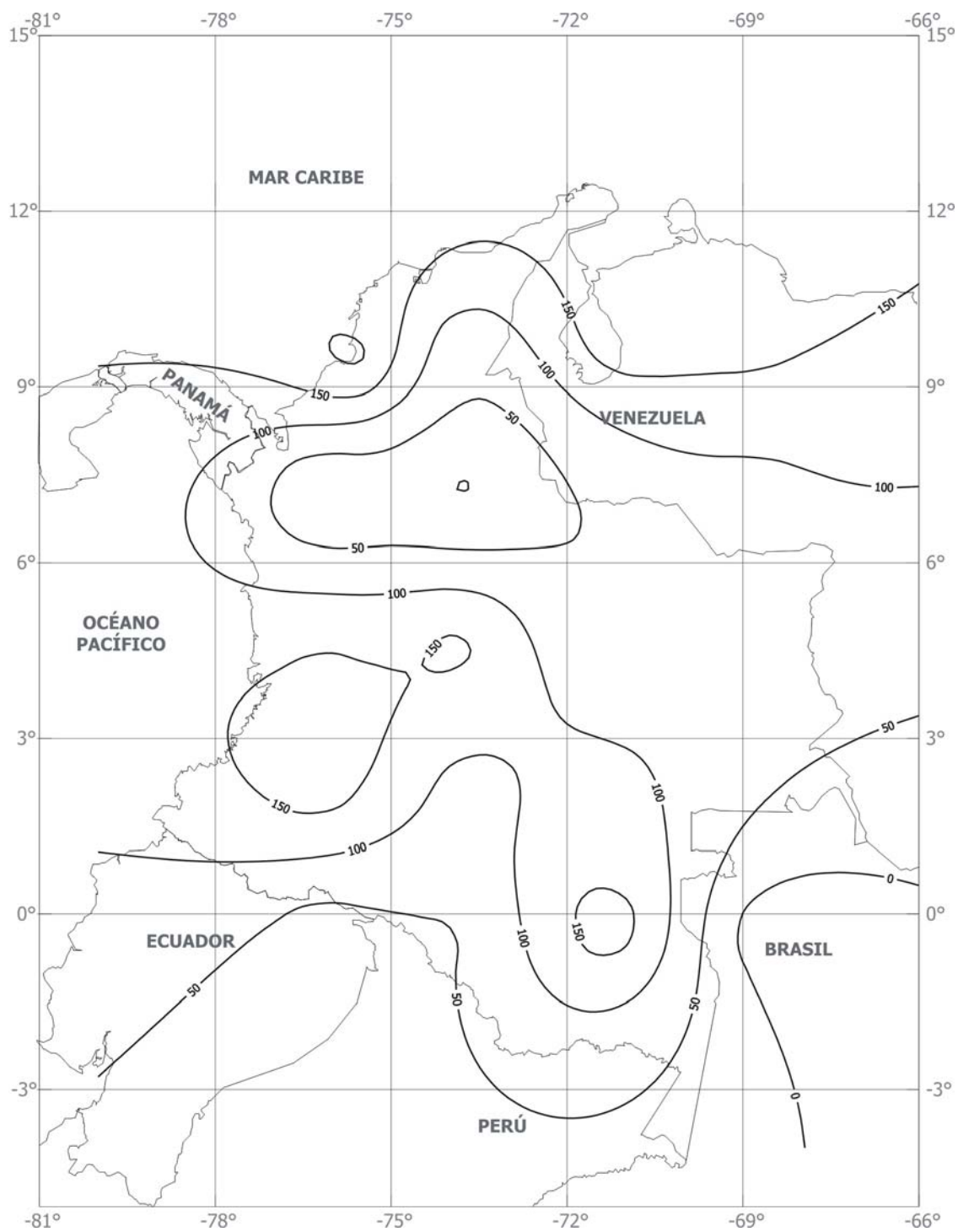


Figura C.5 Diferencias entre las anomalías de Faye regionales ($2,5^\circ \times 2,5^\circ$) y las derivadas del modelo EGM96 [μms^{-2}]

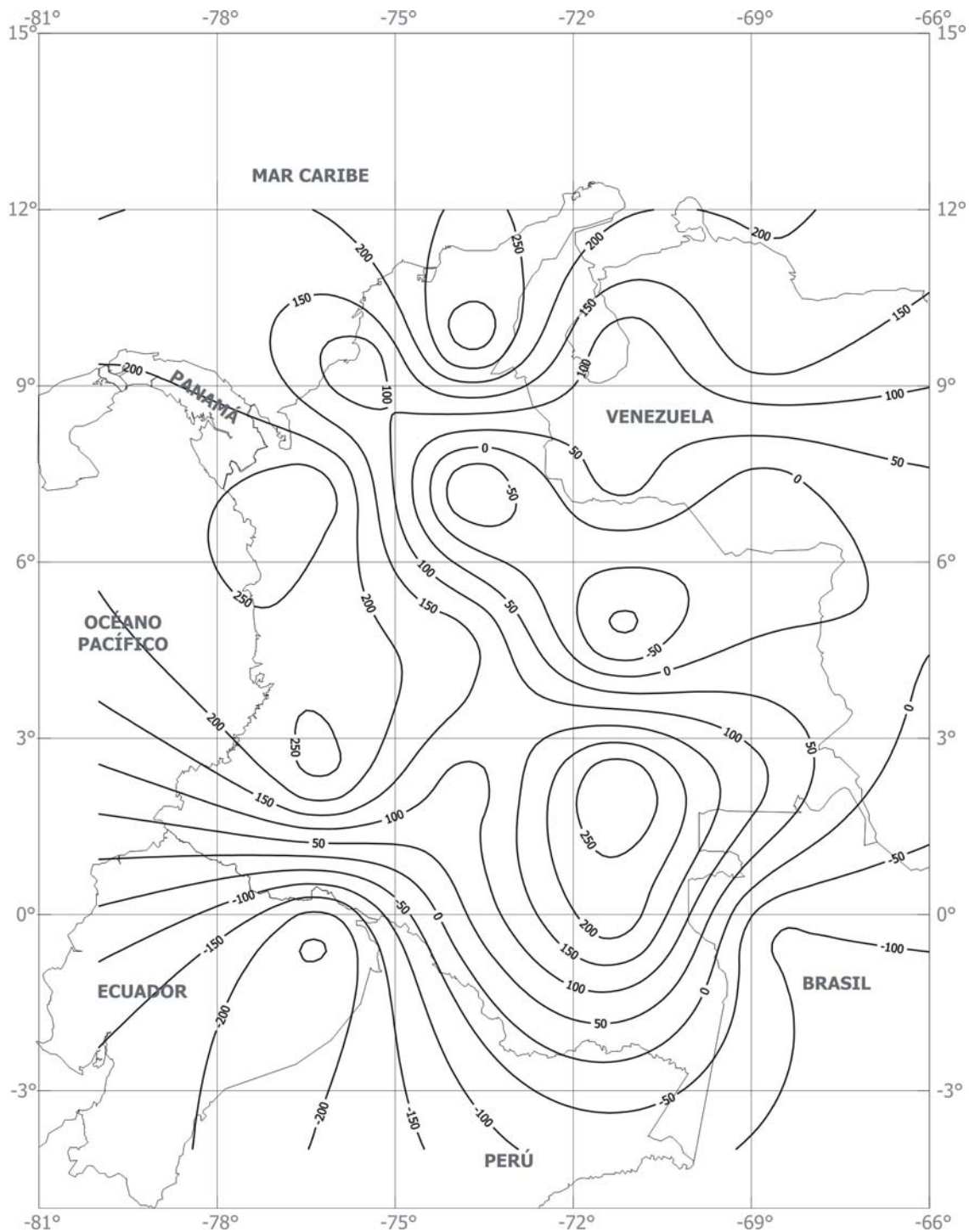


Figura C.6 Diferencias entre las anomalías de Faye regionales ($2,5^\circ \times 2,5^\circ$) y las derivadas del modelo EIGEN-2 [μms^{-2}]

D Representación gráfica de los parámetros del campo de gravedad

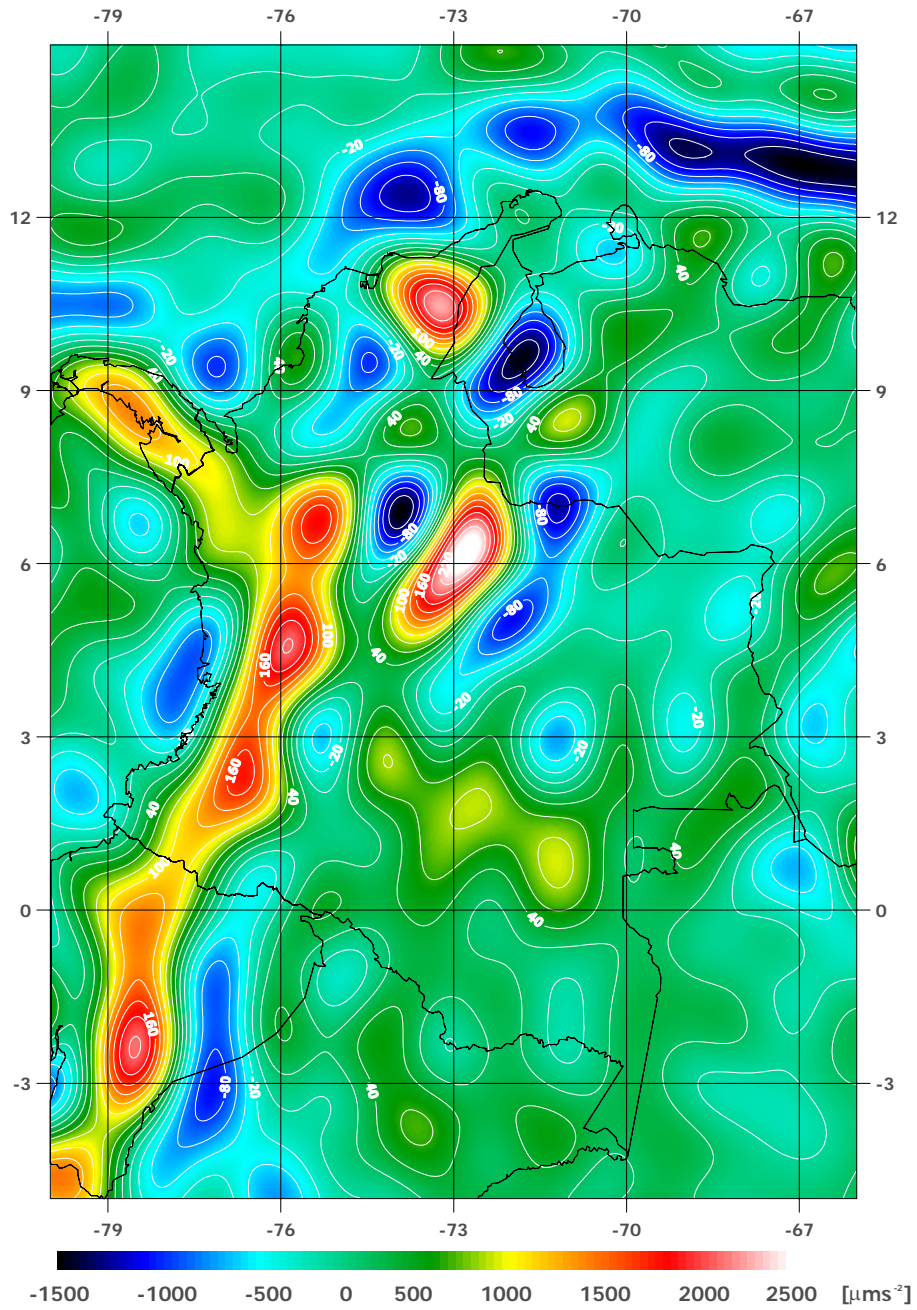


Figura D.1 Anomalías Aire Libre derivadas del modelo TEG-4

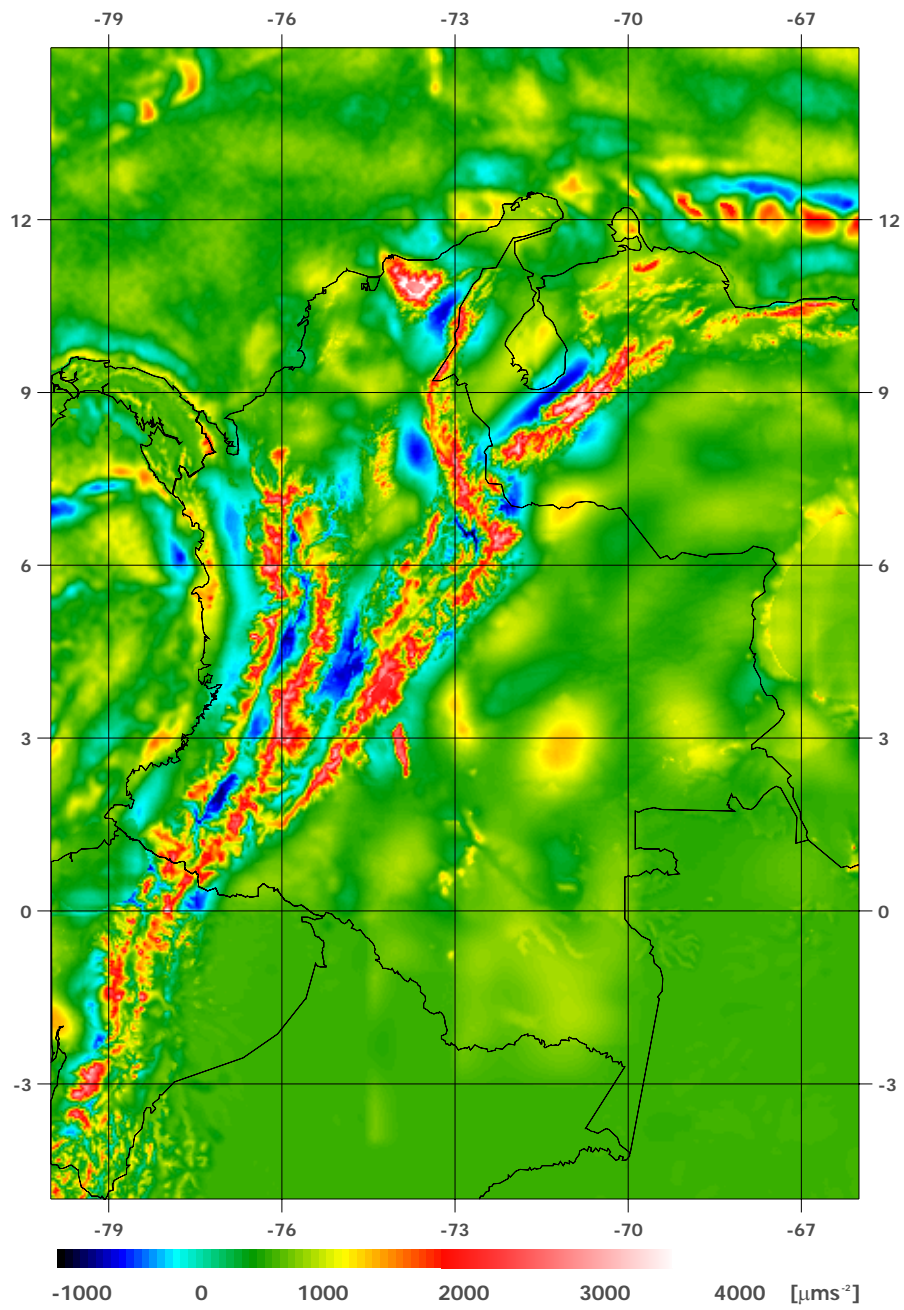


Figura D.2 Anomalías residuales

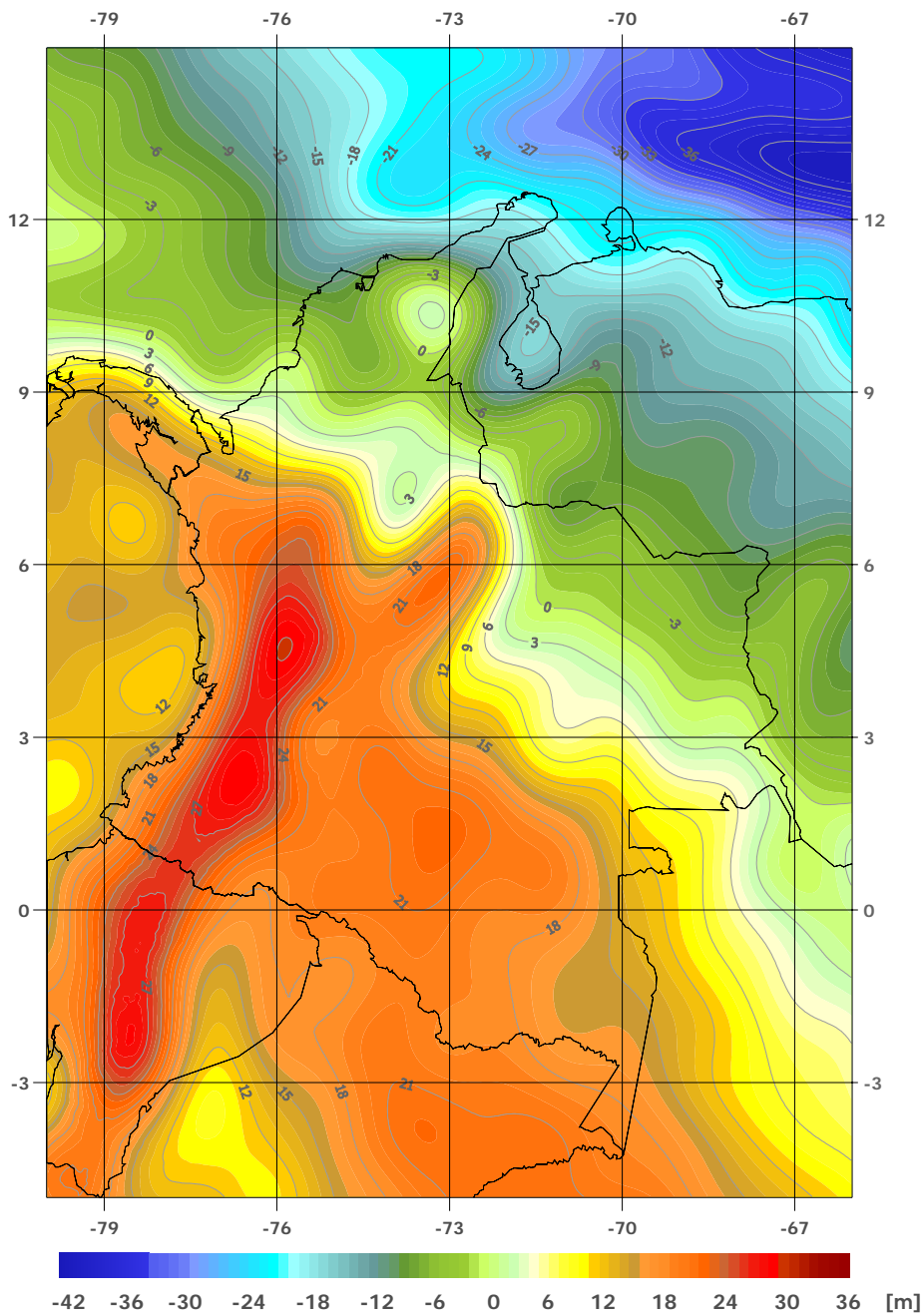


Figura D.3 Componente global del cuasigeoide derivada del modelo TEG-4

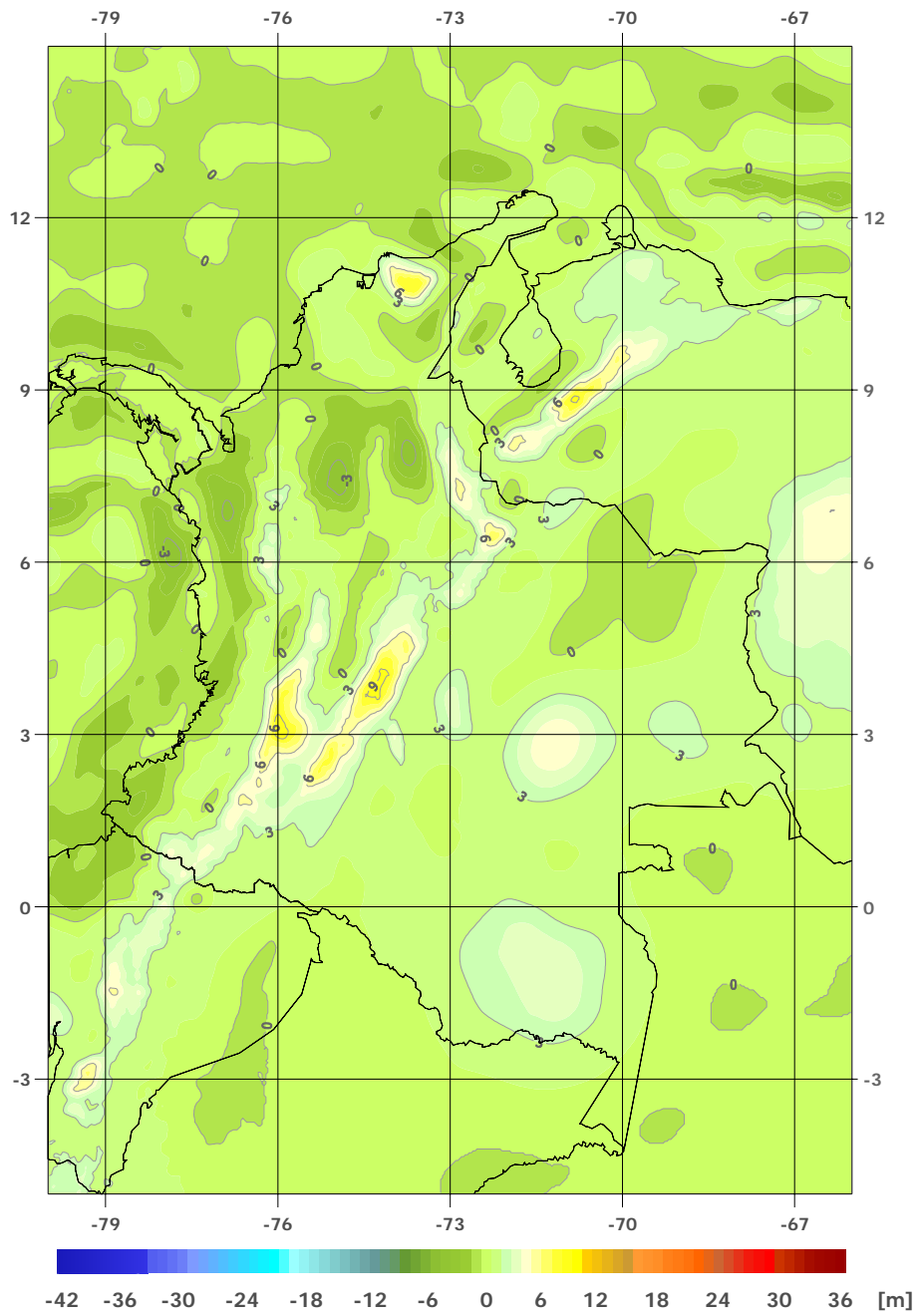


Figura D.4 Componente regional del modelo cuasigeoidal $Q_{geoCol2004}$

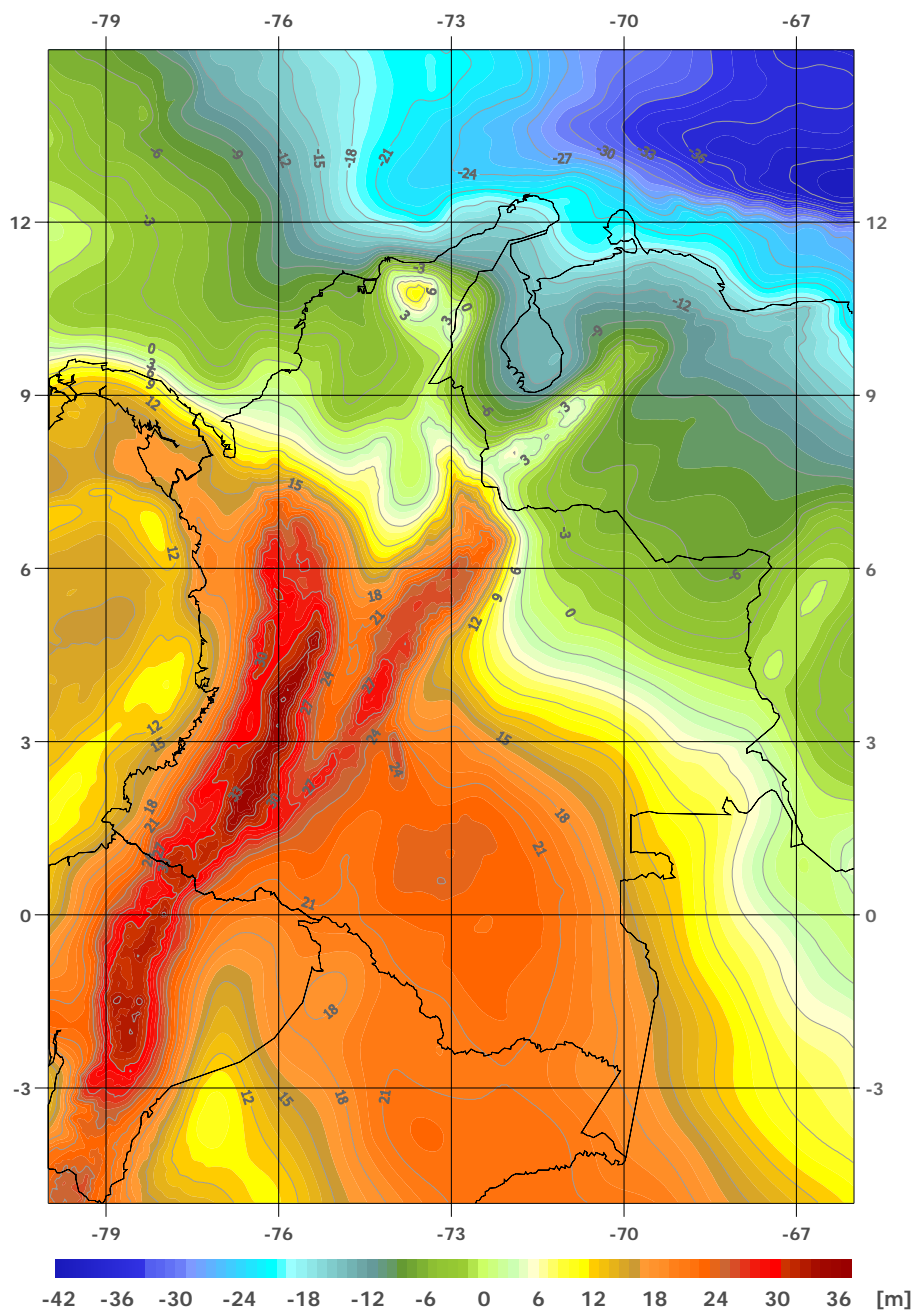


Figura D.5 Modelo geoidal *GeoCol2004*

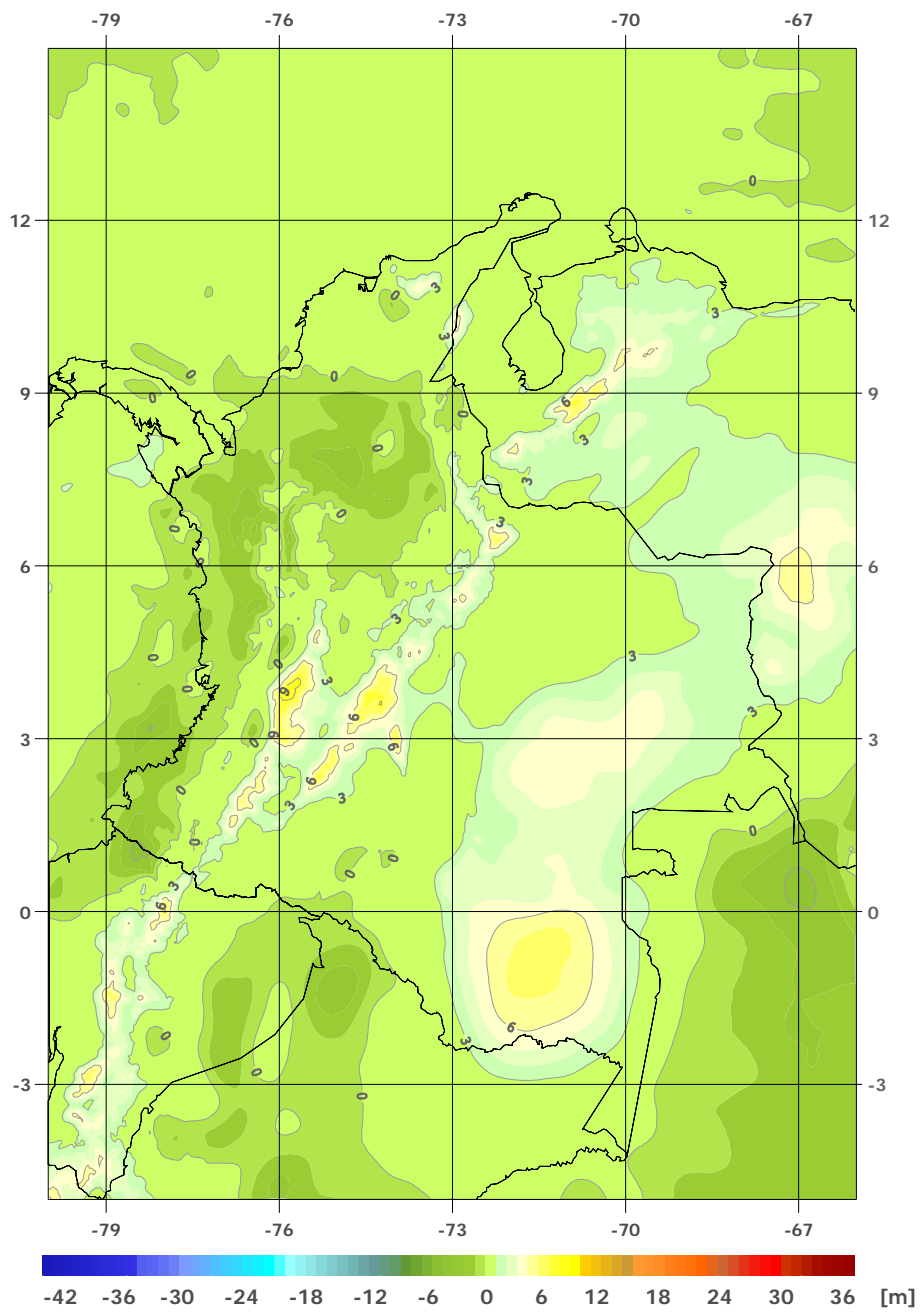


Figura D.6 Diferencias entre los modelos cuasigeoidales $Q_{geoCol2004}$ y $GeoCol2001$