

## TIPOS DE COORDENADAS MANEJADOS EN COLOMBIA

El presente documento describe los sistemas de referencia utilizados en Colombia y las correspondientes relaciones matemáticas para la conversión de coordenadas geográficas a planas de Gauss-Krüger o Cartesianas y viceversa.

### Sistema de referencia MAGNA-SIRGAS

#### Sistemas de referencia

Un *sistema de referencia* es el conjunto de convenciones y conceptos teóricos adecuadamente modelados que permiten definir, en cualquier momento, la orientación, ubicación y escala de tres ejes coordenados  $[X, Y, Z]$ . Dado que un sistema de referencia es un modelo (una concepción, una idea) éste es realizado (materializado) mediante puntos reales cuyas coordenadas son determinadas sobre el sistema de referencia dado, dicho conjunto de puntos se denomina *marco de referencia* (*Reference Frame*). Si el origen de coordenadas del sistema  $[X=0, Y=0, Z=0]$  coincide con el centro de masas terrestre éste se define como *Sistema Geocéntrico de Referencia* o *Sistema Coordenado Geocéntrico* mientras que, si dicho origen está desplazado del geocentro, se conoce como *Sistema Geodésico Local*.

Convencionalmente, las posiciones  $[X, Y, Z]$  se expresan en términos de coordenadas curvilíneas latitud ( $\phi$ ) y longitud ( $\lambda$ ), las cuales requieren de la introducción de un elipsoide de referencia. Para el efecto, el origen de coordenadas  $[X=0, Y=0, Z=0]$  con el centro geométrico del elipsoide, el eje Z coincide con el eje menor del elipsoide, el eje X con la intersección del plano ecuatorial y del meridiano de referencia del elipsoide y el eje Y forma un sistema coordenado de mano derecha. La orientación y ubicación del elipsoide asociado a un sistema coordenado  $[X, Y, Z]$  se conoce como *Datum Geodésico*; si aquel es geocéntrico se tendrá un *Datum Geodésico Geocéntrico o Global*, si es local se tendrá un *Datum Geodésico Local*. Estos últimos se conocen también como *Datum Horizontales* ya que sus coordenadas ( $\phi, \lambda$ ) se definen independientemente de la altura (H). Mientras que la latitud ( $\phi$ ) y la longitud ( $\lambda$ ) se refieren al elipsoide, la altura (H) se define sobre una superficie de referencia (el nivel medio del mar) que no tiene relación alguna con el elipsoide. Los datum geocéntricos, por el contrario, son tridimensionales, éstos permiten definir las tres coordenadas de un punto con respecto a la misma superficie de referencia (el elipsoide), en este caso la tercera coordenada se conoce como altura geodésica o elipsoidal (h).

#### Sistema Internacional de Referencia Terrestre (ITRS: International Terrestrial Reference System)

El sistema geocéntrico utilizado en Geodesia es el Sistema Convencional de Referencia Terrestre (ITRS: International Terrestrial Reference System), el cual es determinado, mantenido y proporcionado por el Servicio Internacional de Rotación Terrestre y Sistemas de Referencia (IERS: International Earth Rotation and Reference Systems Service). El ITRS se

define con origen en el centro de masas terrestre (incluyendo océanos y atmósfera). Su polo coincide con el polo definido por el CIO (Convventional International Origin) para 1903.0, el cual fue adoptado oficialmente en 1967 por la IAU y la IAG. El eje X es orientado hacia el meridiano de Greenwich en 1903.0, llamado también meridiano de referencia IERS (IERS Reference Meridian), el eje Z está orientado hacia el polo del CIO y el eje Y es perpendicular a éstos dos (sistema coordenado de mano derecha). El polo del CIO es la dirección media del polo determinada a partir que las mediciones de cinco estaciones del Servicio Internacional de Latitud (ILS: International Latitude Service) durante 1900.0 - 1906.0. La escala del ITRS es definida en un marco geocéntrico de acuerdo con la teoría relativista de gravitación. Su orientación está forzada a no tener residuales en la rotación global con respecto a la corteza terrestre.

### **Marco Internacional de Referencia Terrestre (ITRF: International Terrestrial Reference Frame)**

La realización (materialización) del ITRS es el marco ITRF (International Terrestrial Reference Frame), el cual está conformado por las coordenadas cartesianas geocéntricas  $[X, Y, Z]$  y las velocidades  $[V_x, V_y, V_z]$  de un conjunto de estaciones observadas mediante técnicas geodésicas espaciales de muy alta precisión. Las velocidades son incluidas ya que el movimiento de las placas tectónicas y sus deformaciones también alteran las coordenadas de sus estaciones, pero estos movimientos no afectan las órbitas de los satélites. Esto se traduce en que, para una observación instantánea sobre la superficie de la Tierra el marco de referencia terrestre ITRF diverge del sistema de referencia satelital, obligando que las coordenadas ITRF sean trasladadas en el tiempo de acuerdo con su variación por los efectos de la dinámica terrestre.

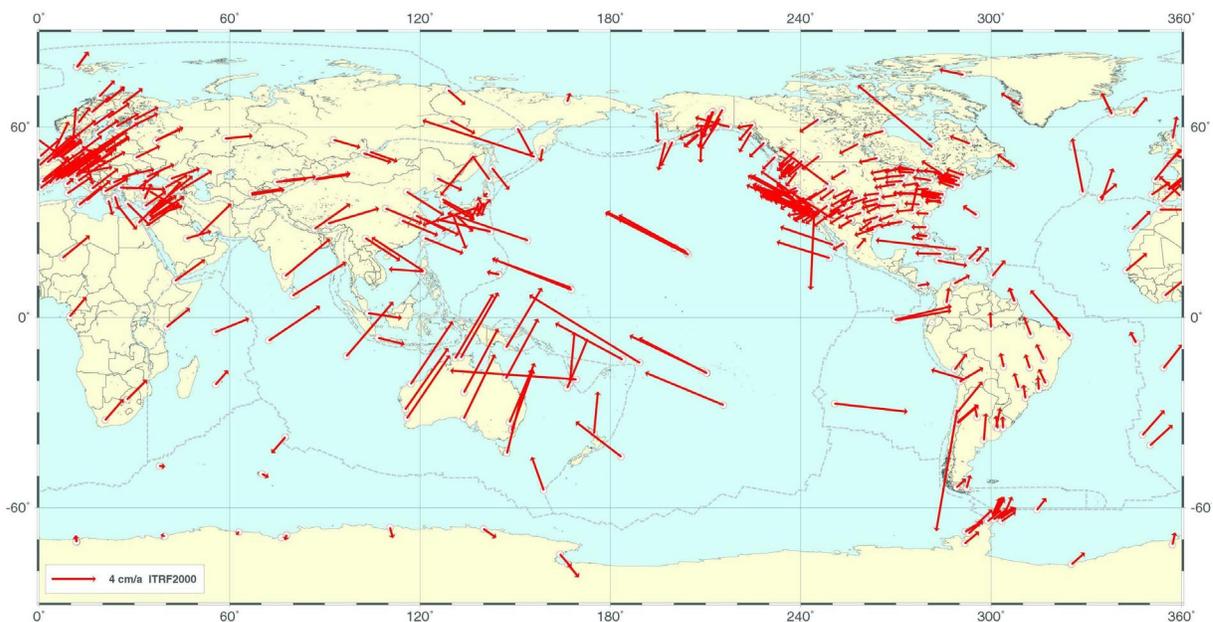
Dada la dependencia de las coordenadas geodésicas con respecto al tiempo, el ITRF es complementado indicando la época para la cual las posiciones de sus estaciones son vigentes. Por ejemplo, la denominación ITRF94 indica que las coordenadas de esta red están definidas para el 1 de enero de 1993. Su traslado a fechas diferentes implica la aplicación de velocidades. El marco de referencia más recientemente calculado es el ITRF2000 (Figura 1), el cual, coincide con la nueva definición del WGS84(G1150) (World Geodetic System 1984, semana GPS No. 1150) introducida a partir del 1 de enero de 2000.

### **Sistema de Referencia Geocéntrico para Las Américas (SIRGAS)**

El ITRF ha sido extendido (densificado) en el continente americano mediante SIRGAS (Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas). Está conformado por una red con más de 180 estaciones geodésicas de alta precisión (algunas de ellas de funcionamiento continuo), cuya distribución ofrece un cubrimiento homogéneo sobre el continente y, por lo tanto, las condiciones necesarias para que las redes nacionales estén vinculadas al ITRF. El datum geodésico correspondiente está definido a partir de los parámetros del elipsoide GRS80

(Geodetic Reference System, 1980), orientado según los ejes coordenados del sistema de referencia SIRGAS, equivalente al ITRF94.

En la primera campaña GPS-SIRGAS, adelantada en mayo de 1995, se establecieron 58 estaciones en el área de América del Sur, cuyas coordenadas corresponden con el ITRF94, época 1995.4. En mayo de 2000 se realizó una segunda campaña en la que se incluyeron, además de las estaciones de 1995, los mareógrafos que definen los sistemas de alturas en los países de América del Sur y nuevos puntos ubicados en América Central, Estados Unidos y Canadá. El resultado de esta nueva campaña es una red homogéneamente distribuida sobre el continente, conformada por 183 estaciones, cuyas coordenadas están calculadas en el ITRF2000, época 2000.4 (Figura 2).



*Figura 1. ITRF2000 y sus velocidades*

El mantenimiento de SIRGAS incluye, además de la preservación física de los monumentos, la determinación del cambio de las coordenadas a través del tiempo (velocidades). Esto garantiza la consistencia entre el sistema terrestre SIRGAS y el sistema de referencia satelital. Las velocidades correspondientes se determinan a partir de mediciones geodésicas repetitivas, dentro de las que se considera la red de estaciones GPS de funcionamiento continuo (o estaciones permanentes) y la ocupación periódica de las estaciones (pasivas) SIRGAS. La red GPS permanente está compuesta por más de 40 puntos de rastreo continuo en el continente suramericano, cuya información es procesada semanalmente por DGFI (Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut) como Centro de Procesamiento Regional (RNAAC: Regional Network Associate Analysis Center) del Servicio Internacional GPS (IGS: International GPS Service), lo que garantiza su referencia permanente con el sistema geocéntrico global.

El cálculo de las velocidades de los puntos SIRGAS se ha hecho con base en las estaciones GPS de funcionamiento continuo, las campañas de 1995 y 2000 y los proyectos geodinámicos desarrollados en el continente, entre los que se destacan: CAP (Central Andes GPS Project), SAGA (South America Geodynamics Activity), SNAPP (South America – Nazca Plate Motion Project) y CASA (Central And South America GPS Geodynamics Project). La figura 3 muestra el modelo de velocidades vigente.

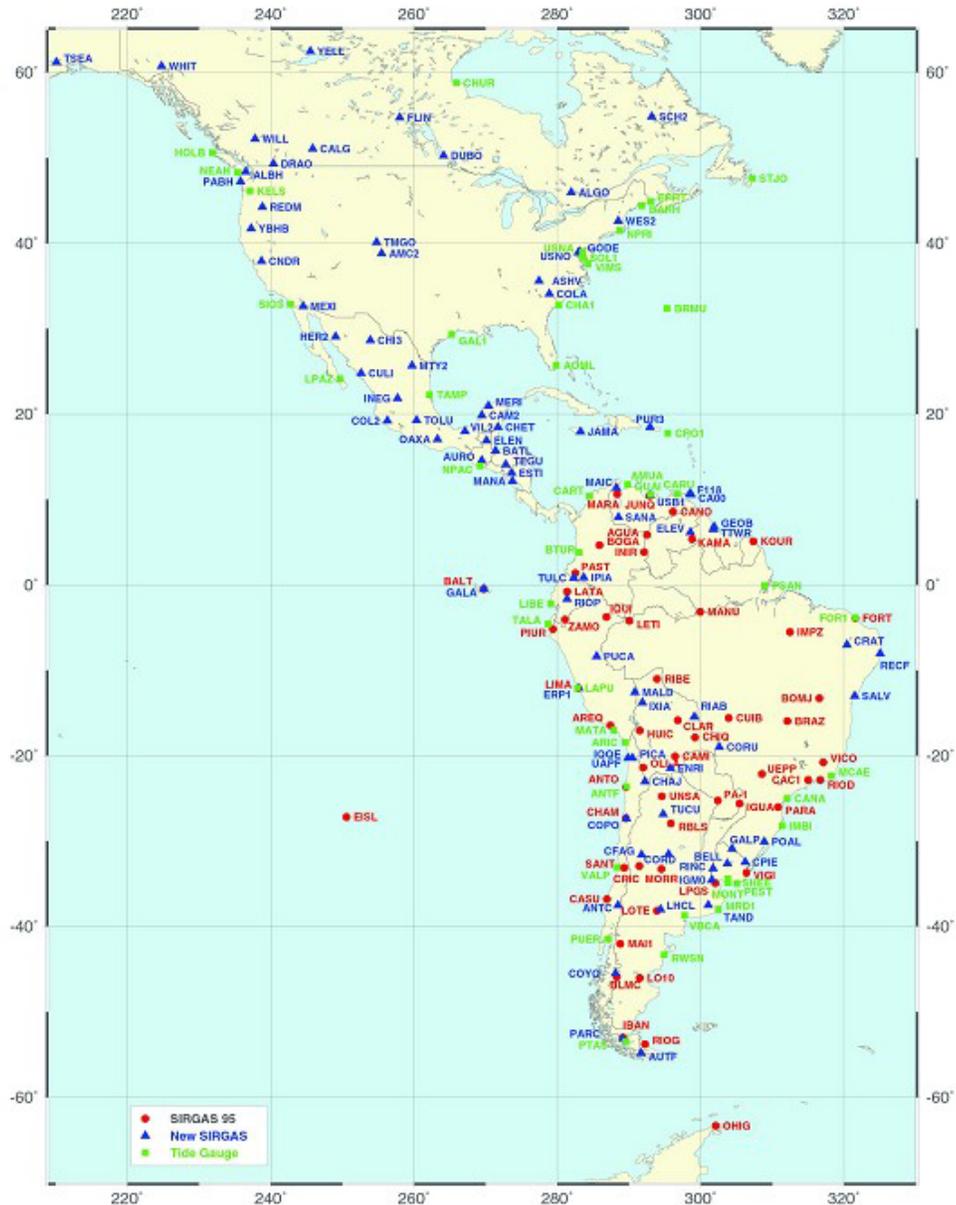
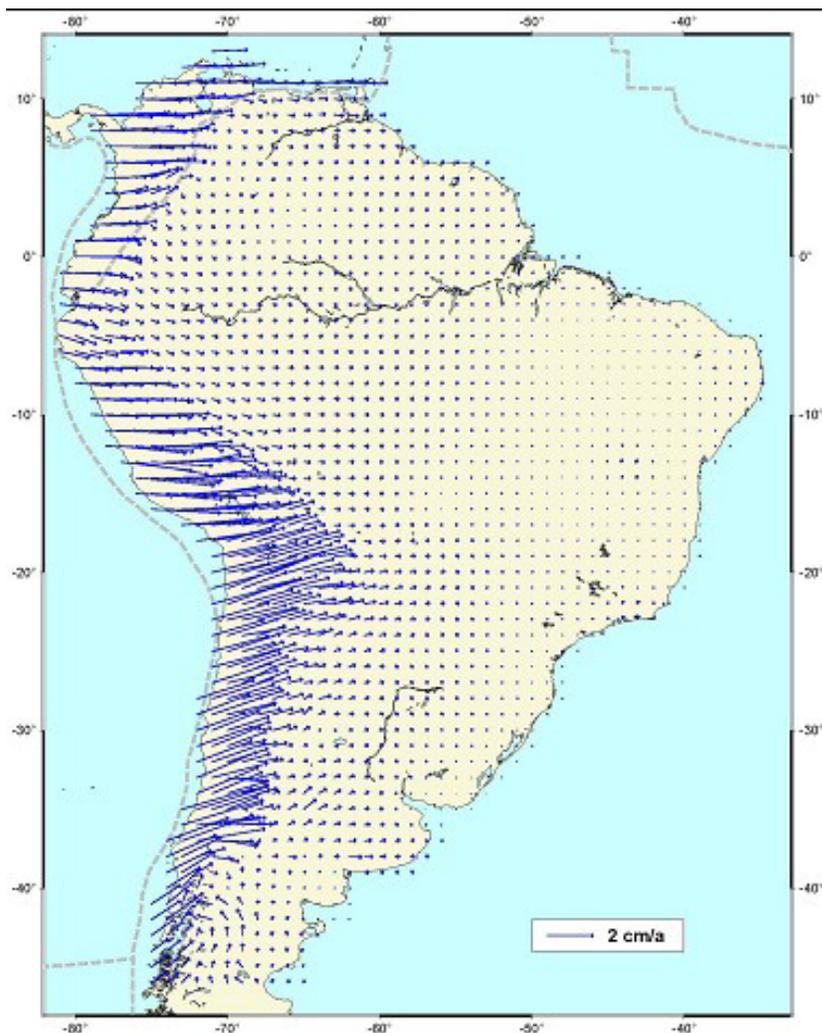


Figura 2. SIRGAS: Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas



*Figura 3. Modelo de velocidades para América del Sur (Drewes and Heidbach, 2003). Los vectores indican movimientos relativos con respecto a la placa SOAM.*

### **Marco Geocéntrico Nacional de Referencia (MAGNA)**

SIRGAS es la extensión del ITRF en América; no obstante, dadas las características técnicas de los sistemas GNSS, debe ser densificado para satisfacer los requerimientos en precisión de los usuarios de información georreferenciada en los diferentes países. En Colombia, el IGAC, organismo nacional encargado de determinar, establecer, mantener y proporcionar los sistemas oficiales de referencia geodésico, gravimétrico y magnético (Decretos No. 2113/1992 y 208/2004) inició a partir de las estaciones SIRGAS la determinación de la Red Básica GPS, denominada MAGNA (Marco Geocéntrico Nacional de Referencia) que, por estar referida a SIRGAS se denomina convencionalmente MAGNA-SIRGAS. El datum geodésico asociado corresponde con el elipsoide GRS80 (Geodetic Reference System, 1980). MAGNA está conformada por cerca de 70 estaciones GPS de cubrimiento nacional de las cuales 6 son de

funcionamiento continuo, 8 son vértices SIRGAS y 16 corresponden con la red geodinámica CASA (Central and South American geodynamics network) (Figura 4). Las coordenadas de las estaciones MAGNA-SIRGAS están definidas sobre el ITRF94, época 1995.4. Su precisión interna está en el orden de ( $\pm 2$  mm ...  $\pm 7$  mm), su exactitud horizontal en  $\pm 2$  cm y la vertical en  $\pm 6$  cm.

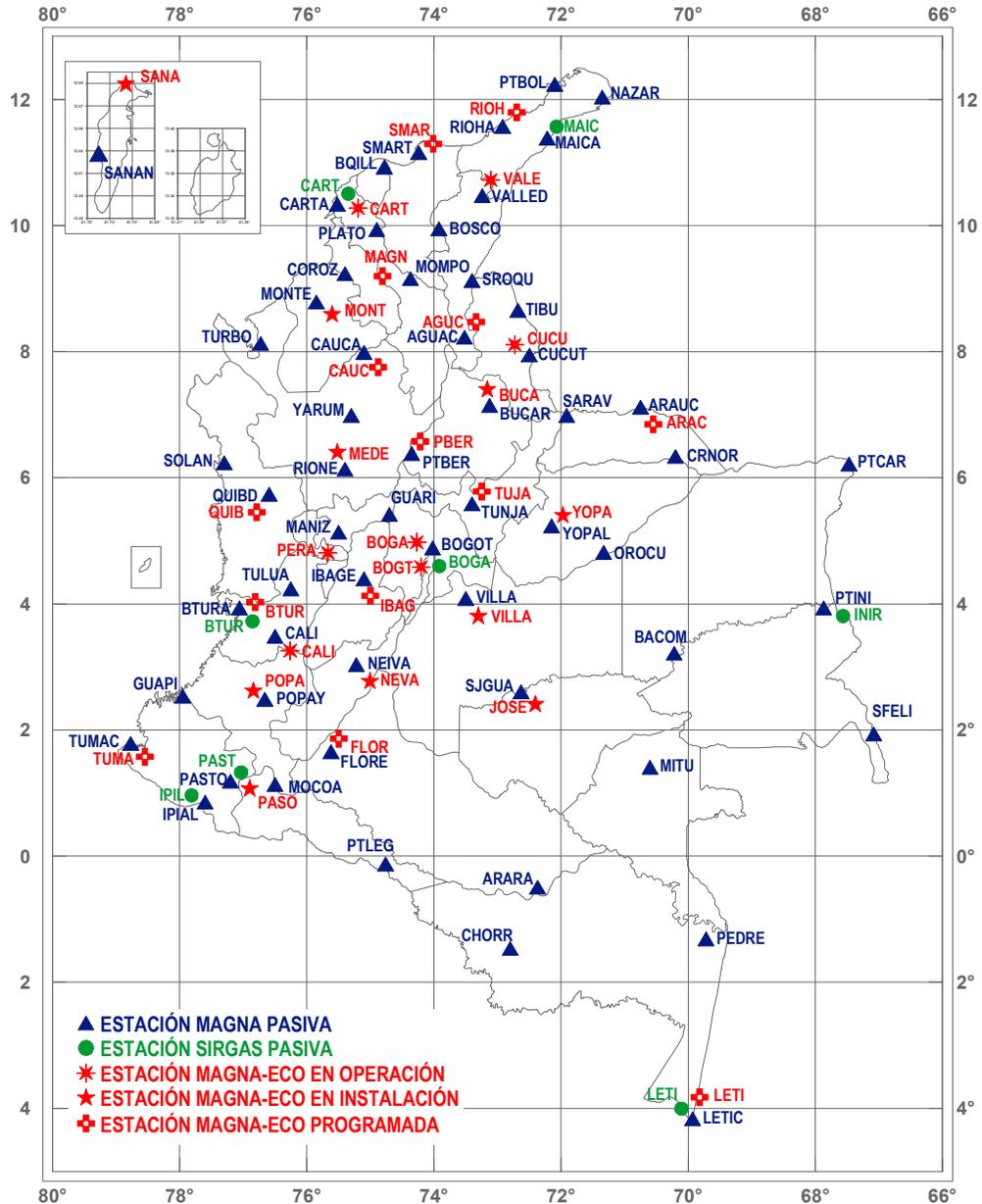


Figura 4. Sistema MAGNA-SIRGAS: Red Básica GPS y estaciones de funcionamiento continuo (estado a septiembre de 2004).

Dado que Colombia se haya ubicada sobre la zona de convergencia de tres placas, la dinámica tectónica (placas rígidas + zonas de deformación) genera variaciones anuales entre 1 y 2 cm en las coordenadas geodésicas. Con el propósito de determinar precisamente dichas variaciones el IGAC adelanta la instalación de una red de estaciones GPS de funcionamiento continuo, administradas desde su Sede Central y procesadas en conjunto con el Centro de Análisis Regional del IGS en el DGFI, de modo que sus posiciones también sean orientadas permanentemente con el ITRF vigente (figura 4).

### **Antiguo datum geodésico horizontal en Colombia: DATUM BOGOTÁ**

Antes de la definición del Sistema MAGNA-SIRGAS la plataforma de referencia nacional estaba constituida por un datum geodésico horizontal, adoptado en 1941, cuyo elipsoide asociado corresponde con el Internacional de 1924 y cuyo punto datum se localizó en el Observatorio Astronómico de Bogotá, de aquí su nombre. A partir de este marco, el IGAC inició hace 60 años el establecimiento de la red geodésica de control horizontal (ARENA: Antigua Red Nacional), la cual está conformada por cerca de once mil puntos, que constituyen los vértices geodésicos de primer, segundo y tercer orden. La red de primer orden fue determinada mediante arcos de triangulación distribuidos sobre las cumbres más prominentes del territorio nacional y fueron ajustados a partir de 33 estaciones astronómicas. Esta red dio apoyo a los vértices de segundo orden y éstos a su vez a los de tercer orden, para lo cual se emplearon métodos topográficos de precisión (triangulación, bisección, trilateración y poligonación) en su determinación. La precisión de las coordenadas horizontales ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) así obtenidas depende directamente de la certidumbre de las mediciones angulares ópticas, la cual varía entre 0,01" y 0,1". Asimismo, la altura de los vértices geodésicos se determinó a partir del Datum Buenaventura a través de nivelación trigonométrica, cuya precisión no es mejor que 0,80 m.

El Datum BOGOTÁ materializa al ITRS con un error sistemático de aproximadamente 250 m ya que, su origen se encuentra desplazado del geocentro 530 m. Esto significa que las posiciones definidas sobre el Datum BOGOTÁ aparecen desplazadas en una cantidad similar con respecto a las posiciones definidas sobre MAGNA-SIRGAS. El error relativo de la red ARENA varía de acuerdo con la región del país, lo que no permite un control apropiado para levantamientos GPS precisos y, a diferencia de MAGNA-SIRGAS, que es un sistema de referencia tridimensional, el Datum BOGOTÁ es un marco bidimensional en el que se dispone de coordenadas curvilíneas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) y altura sobre el nivel medio del mar (H), sin conocerse la altura elipsoidal (h).

### **Constantes del Elipsoide Internacional o de Hayford**

El elipsoide asociado al Datum BOGOTÁ es el Internacional o de Hayford, el cual fue adoptado como elipsoide de referencia por la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG: International Union of Geodesy and Geophysics) en 1924. Sus constantes son:

Constante	Relación matemática	Valor
Semieje mayor ( $a$ )	Constante definida	$a = 6\,378\,388,000\,00\text{ m}$
Aplanamiento recíproco ( $1/f$ )	Constante definida	$1/f = 297$
Primera excentricidad ( $e^2$ )	$e^2 = 2f - f^2$	$e^2 = 6,722\,670\,022\,33 \cdot 10^{-3}$
Segunda excentricidad ( $e'^2$ )	$e'^2 = \frac{f(2-f)}{(1-f)^2}$	$e'^2 = 6,768\,170\,197\,22 \cdot 10^{-3}$
Semieje menor ( $b$ )	$b = a(1-f)$	$b = 6\,356\,911,946\,13\text{ m}$

### Constantes del Elipsoide GRS80 (Geodetic Reference System, 1980)

El elipsoide GRS80 fue definido y adoptado oficialmente por la Asociación Internacional de Geodesia (AIG: International Association of Geodesy) de la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG: International Union of Geodesy and Geophysics) en 1979. Éste es el elipsoide asociado al ITRS y por tanto, a SIRGAS y a MAGNA. En la práctica equivale al elipsoide WGS84 (World Geodetic System, 1984). Sus constantes son:

Constante	Relación matemática	Valor
Semieje mayor ( $a$ )	Constante definida	$a = 6\,378\,137,000\,00\text{ m}$
Constante gravitacional geocéntrica ( $GM$ )	Constante definida	$GM = 3\,896\,005 \cdot 10^8\text{ m}^3\text{ s}^{-2}$
Factor de aplanamiento dinámico ( $J_2$ )	Constante definida	$J_2 = 108\,263 \cdot 10^{-8}$
Velocidad angular de rotación ( $\omega$ )	Constante definida	$\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{11}\text{ rad s}^{-1}$
Primera excentricidad ( $e^2$ )	Cálculo iterativo a partir de $a, GM, J_2, \omega$	$e^2 = 6,694\,380\,022\,90 \cdot 10^{-3}$
Segunda excentricidad ( $e'^2$ )	$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}$	$e'^2 = 6,739\,496\,775\,48 \cdot 10^{-3}$
Semieje menor ( $b$ )	$b = a\sqrt{1-e^2}$	$b = 6\,356\,752,314\,14\text{ m}$
Aplanamiento recíproco ( $1/f$ )	$f = \frac{a-b}{a}$	$1/f = 298,257\,222\,101$

### Conversión entre coordenadas cartesianas geocéntricas [X, Y, Z] y elipsoidales [ $\phi, \lambda, h$ ]

Las coordenadas obtenidas mediante posicionamiento global por satélite corresponden con las cartesianas geocéntricas  $[X, Y, Z]$ , cuya relación con las elipsoidales  $[\varphi, \lambda, h]$  corresponde con (Figura 5):

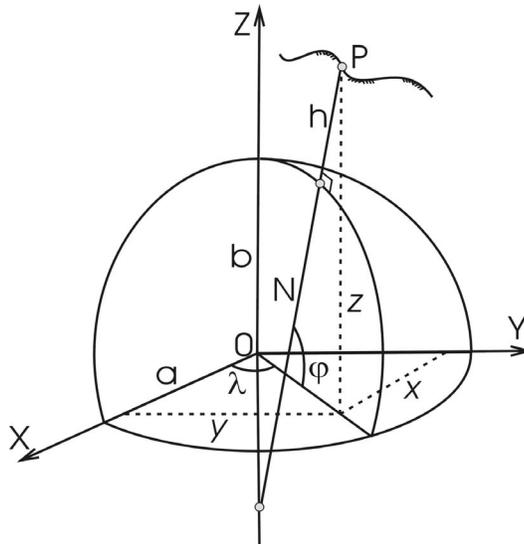


Figura 5. Coordenadas rectangulares geocéntricas  $[X, Y, Z]$  y elipsoidales  $[\varphi, \lambda, h]$ .

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ ((1-e^2)N+h)\sin\varphi \end{bmatrix} \quad (1)$$

Así mismo, las coordenadas elipsoidales  $[\varphi, \lambda, h]$  se derivan a partir de las geocéntricas  $[X, Y, Z]$  a través de:

$$\tan\varphi = \frac{Z + e^2 b \sin^3\vartheta}{\sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 a \cos^3\vartheta} \quad ; \quad \tan\vartheta = \frac{Z a}{\sqrt{X^2 + Y^2} b} \quad (2a)$$

$$\tan\lambda = \frac{Y}{X} \quad (2b)$$

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\varphi} - N \quad (2c)$$

siendo:

$a$	semieje mayor del elipsoide de referencia
$b$	semieje menor del elipsoide de referencia
$e^2$	primera excentricidad del elipsoide de referencia
$e'^2$	segunda excentricidad del elipsoide de referencia
$N$	Radio de curvatura principal o gran normal:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3)$$

### **Conversión entre coordenadas elipsoidales $[\varphi, \lambda, h]$ y planas de Gauss-Krüger $[N, E]$**

La proyección cartográfica oficial de Colombia es el sistema Gauss-Krüger. Éste es una representación conforme del elipsoide sobre un plano, es decir que el ángulo formado entre dos líneas sobre la superficie terrestre se mantiene al ser éstas proyectadas sobre el plano. Los meridianos y paralelos se intersectan perpendicularmente, pero no son líneas rectas, sino curvas complejas, excepto el meridiano central (de tangencia) y el paralelo de referencia (figura 6). La escala de la representación permanece constante sobre el meridiano central, pero ésta varía al alejarse de aquel, introduciendo deformaciones en función de la longitud ( $\lambda$ ). Por tal razón, el desarrollo de la proyección se controla mediante husos, que en el caso de Colombia se extienden  $1,5^\circ$  al lado y lado del meridiano central.

El sistema de proyección UTM (Universal Transverse Mercator) corresponde con el de Gauss-Krüger, sólo que utiliza un factor de escala equivalente a  $m = 0,9996$  para el meridiano central y husos de  $6^\circ$ .

En Colombia, el origen principal de las coordenadas Gauss-Krüger se definió en la pilastra sur del Observatorio Astronómico de Bogotá, asignándose los valores  $N = 1\,000\,000$  m y  $E = 1\,000\,000$  m. Los orígenes complementarios se han establecido a  $3^\circ$  y  $6^\circ$  de longitud al este y oeste de dicho punto. Este sistema se utiliza para la elaboración de cartografía a escalas menores que 1:1 500 000, donde se proyecta la totalidad del territorio nacional. También se utiliza para cartografía a escalas entre 1:10 000 y 1:500 000 de las comarcas comprendidas en la zona de  $3^\circ$  correspondiente.

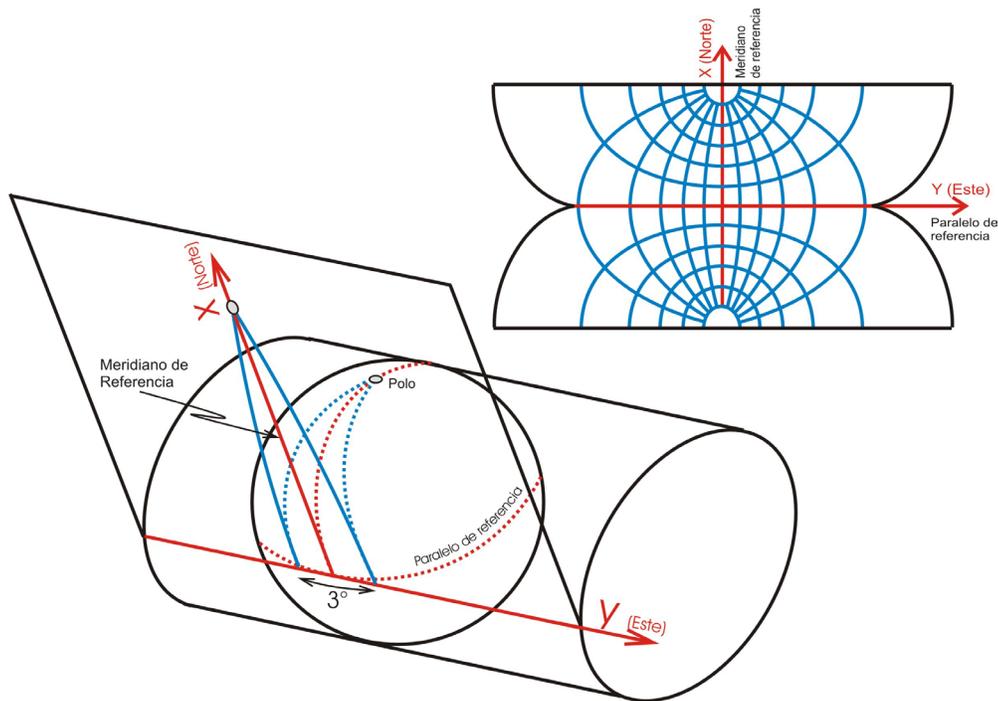


Figura 6 Sistema de proyección cartográfica Gauss-Krüger

Las coordenadas MAGNA de los orígenes Gauss-Krüger en Colombia corresponden con:

Origen	Coordenadas Elipsoidales		Coordenadas Gauss-Krüger	
	Latitud (N)	Longitud (W)	Norte [m]	Este [m]
Bogotá-MAGNA	4° 35' 46,3215"	74° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0
Este Central - MAGNA	4° 35' 46,3215"	71° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0
Este Este - MAGNA	4° 35' 46,3215"	68° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0
Oeste - MAGNA	4° 35' 46,3215"	77° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0
Oeste Oeste - MAGNA	4° 35' 46,3215"	80° 04' 39,0285"	1 000 000,0	1 000 000,0

Las coordenadas en Datum BOGOTÁ de los orígenes Gauss-Krüger en Colombia corresponden con:

Origen	Coordenadas Elipsoidales		Coordenadas gauss-Krüger	
	Latitud (N)	Longitud (W)	Norte [m]	Este [m]
Bogotá - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	74° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0
Este Central - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	71° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0
Este Este - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	68° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0
Oeste - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	77° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0
Oeste Oeste - BOGOTÁ	4° 35' 56,57"	80° 04' 51,30"	1 000 000,0	1 000 000,0

Las coordenadas planas de Gauss-Krüger [N, E] se obtienen a partir de las coordenadas elipsoidales  $[\varphi, \lambda]$  mediante (Figura 7):

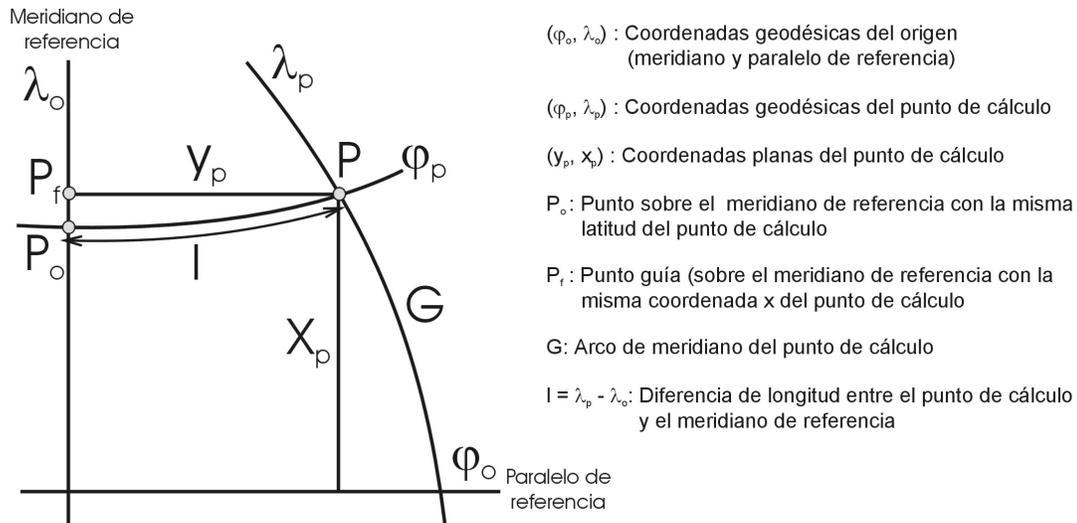


Figura 7. Coordenadas planas de Gauss-Krüger y elipsoidales  $[\varphi, \lambda]$ .

Coordenada Norte:

$$\begin{aligned}
 N = & (G(\varphi_p) - G(\varphi_0)) + \frac{t}{2} N l^2 \cos^2 \varphi_p + \frac{t}{24} N \cos^4 \varphi_p (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) l^4 \\
 & + \frac{t}{720} N \cos^6 \varphi_p (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2 \eta^2) l^6 \\
 & + \frac{t}{40320} N \cos^8 \varphi_p (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) l^8 + \dots + 1\,000\,000,0
 \end{aligned} \tag{4a}$$

Coordenada Este:

$$\begin{aligned}
 E = & N l \cos \varphi_p + \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi_p (1 - t^2 + \eta^2) l^3 \\
 & + \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi_p (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2 \eta^2) l^5 \\
 & + \frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi_p (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) l^7 + \dots + 1\,000\,000,0
 \end{aligned} \tag{4b}$$

Siendo:

$$l = \lambda_p - \lambda_o \quad ; \quad t = \tan \varphi_p \quad ; \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_p \quad ; \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 \varphi_p}}$$

Arco de meridiano del punto de cálculo  $G(\varphi_p)$ :

$$G(\varphi_p) = \alpha [\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi + \varepsilon \sin 8\varphi + \dots]$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a+b}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \dots \right) \\ \beta &= -\frac{3}{2} n + \frac{9}{16} n^3 - \frac{3}{32} n^5 + \dots \\ \gamma &= \frac{15}{16} n^2 - \frac{15}{32} n^4 + \dots \\ \delta &= -\frac{35}{48} n^3 + \frac{105}{256} n^5 - \dots \\ \varepsilon &= \frac{315}{512} n^4 + \dots \\ n &= \frac{a-b}{a+b} \end{aligned} \tag{5}$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $e'^2$ ,  $e'^2$  son las constantes del elipsoide de referencia y  $\varphi$  se expresa en radianes.

El cálculo de coordenadas elipsoidales  $[\varphi, \lambda]$  a partir de las planas de Gauss-Krüger  $[N, E]$  se adelanta a través de:

*Latitud:*

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_f + \frac{t_f}{2N_f^2} (-1 - \eta_f^2) \Delta E^2 \\ &+ \frac{t_f}{24N_f^4} (5 + 3t_f^2 + 6\eta_f^2 - 6t_f^2\eta_f^2 - 3\eta_f^4 - 9t_f^2\eta_f^4) \Delta E^4 \\ &+ \frac{t_f}{720N_f^6} (-61 - 90t_f^2 - 45t_f^4 - 107\eta_f^2 + 162t_f^2\eta_f^2 + 45t_f^4\eta_f^2) \Delta E^6 \\ &+ \frac{t_f}{40320N_f^8} (1385 + 3633t_f^2 + 4096t_f^4 + 1575t_f^6) \Delta E^8 + \dots \end{aligned} \tag{6a}$$

*Longitud:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda_o + \frac{1}{N_f \cos \varphi_f} \Delta E + \frac{1}{6N_f^3 \cos \varphi_f} (-1 - 2t_f^2 - \eta_f^2) \Delta E^3 \\
&+ \frac{1}{120 N_f^5 \cos \varphi_f} (5 + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8t_f^2 \eta_f^2) \Delta E^5 \\
&+ \frac{1}{5040 N_f^7 \cos \varphi_f} (-61 - 662t_f^2 - 1320t_f^4 - 720t_f^6) \Delta E^7 + \dots
\end{aligned} \tag{6b}$$

Latitud del punto guía ( $\varphi_f$ ):

$$\begin{aligned}
\varphi_f &= \frac{\Delta N}{\bar{\alpha}} + \beta \sin \frac{2\Delta N}{\bar{\alpha}} + \gamma \sin \frac{4\Delta N}{\bar{\alpha}} + \delta \sin \frac{6\Delta N}{\bar{\alpha}} + \varepsilon \sin \frac{8\Delta N}{\bar{\alpha}} + \dots \\
\bar{\alpha} &= \frac{a+b}{2} \left( 1 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{64}n^4 + \dots \right) \\
\beta &= \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \frac{269}{512}n^5 + \dots \\
\gamma &= \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4 + \dots \\
\delta &= \frac{151}{96}n^3 - \frac{417}{128}n^5 - \dots \\
\varepsilon &= \frac{1097}{512}n^4 + \dots \\
n &= \frac{a-b}{a+b}
\end{aligned} \tag{7}$$

siendo:

$$\Delta N = N - N_o \quad ; \quad \Delta E = E - E_o \quad ; \quad t_f = \tan \varphi_f \quad ; \quad \eta_f^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_f \quad ; \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_f}} d$$

Donde  $a$ ,  $b$ ,  $e^2$ ,  $e'^2$  son las constantes del elipsoide de referencia.

$N_o$  corresponde con la coordenada Norte para  $\varphi = 0$  (ecuador), siendo para el Datum BOGOTA  $N_o = 491\,447,16$  y para MAGNA-SIRGAS  $N_o = 491\,767,5344$

### Conversión entre coordenadas elipsoidales [ $\varphi$ , $\lambda$ , $h$ ] y planas cartesianas [ $N$ , $E$ ]

El sistema de proyección cartesiana equivale a una representación conforme del elipsoide sobre un plano paralelo, ubicado a una altura  $H_o$ , a uno tangente al elipsoide en un punto origen [ $\varphi_o$ ,  $\lambda_o$ ] (figura 8). La proyección del meridiano que pasa por este punto representa el eje de la coordenada Norte. No obstante, los puntos sobre el elipsoide y los equivalentes

proyectados sobre el plano no tienen una relación geométrica, ésta es puramente matemática. La proyección cartesiana es utilizada para la elaboración de planos de ciudades (cartografía a escalas mayores que 1:5000), de allí, existen tantos orígenes de coordenadas cartesianas como ciudades o municipios. El plano de proyección se define sobre la altitud media de la comarca a representar.

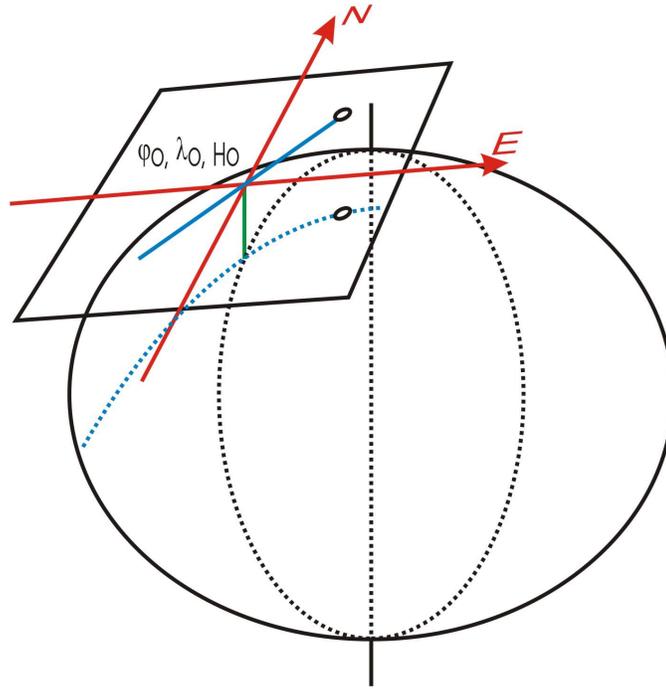


Figura 8 Proyección cartesiana

El cálculo de coordenadas planas cartesianas [N, E] a elipsoidales [ $\varphi$ ,  $\lambda$ ] corresponde con:

$$N = M_{\varphi_0} \left[ \Delta\varphi_{rad} + \frac{\tan \varphi_0 \Delta\lambda_{rad}^2 N_{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{2 M_{\varphi_0} N_{\varphi_0}} \right] \times \left[ 1 + \frac{Pp}{M_{\varphi_m}} \right] + N_o \quad (8a)$$

$$E = \Delta\lambda_{rad} N_{\varphi} \cos \varphi \left[ 1 + \frac{Pp}{N_{\varphi_0}} \right] + E_o \quad (8b)$$

Igualmente, la conversión de coordenadas planas cartesianas [N, E] a geodésicas [ $\varphi$ ,  $\lambda$ ] está dada por:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \quad \lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda \quad (9a)$$

$$\Delta\varphi_{rad} = \frac{\Delta N}{\left[1 + \frac{Pp}{a(1-e^2)}\right] M_{\varphi_o}} - \left[ \frac{\tan \varphi_o}{2 M_{\varphi_o} N_{\varphi_o}} \times \left( \frac{\Delta E}{1 + \frac{Pp}{a}} \right)^2 \right] \quad (9b)$$

$$\Delta\lambda_{rad} = \frac{\Delta E \sin \varphi}{N_{\varphi} \cos \varphi \left(1 + \frac{Pp}{a}\right)} \quad (9c)$$

siendo:

$N, E$ : coordenadas cartesianas planas del punto de cálculo

$N_o, E_o$ : origen del sistema de coordenadas cartesianas

$$\Delta N = N - N_o$$

$$\Delta E = E - E_o$$

$\varphi, \lambda$ : coordenadas geográficas del punto de cálculo

$\varphi_o, \lambda_o$ : coordenadas geográficas del origen del sistema de coordenadas cartesianas

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_o$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$$

$$\varphi_m = (\varphi_o + \varphi) / 2$$

$Pp$ : Altura del plano de proyección

$a$ : semieje mayor del elipsoide de referencia

$e^2$ : primera excentricidad del elipsoide de referencia

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad ; \quad M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

## *Bibliografía*

Drewes, H; Heidbach, O. Deformation of the South American Crust estimated from finite element and collocation methods. Presented at the IUGG General Assembly in Sapporo, Japan, July 2003 (En prensa).

Drewes, H; Kaniuth, K.; Völksen, Ch.; Costa, S. M. A.; Fourtes, L. P. S. Results of the SIRGAS campaign and coordinates variations with respect to the 1995 South American reference frame. Presented at the IUGG General Assembly in Sapporo, Japan, July 2003 (En prensa).

IERS Technical Note No. 27, 2000.

IERS Technical Note No. 31, 2003.

Hofmann-Wellenhof, B.; Lichtenegger, H and Collins, J. *GPS: theory and practice*. New York: Springer-Verlag, 1996

Hofmann-Wellenhof, B.; Kienast, G, und Lichtenegger, H. *GPS in der Praxis*. Wien, New York: Springer-Verlag, 1994

Leick, A. *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, 1995

Merrigan, M.; Swift, E.; Wong, R.; Saffer, J. A refinement to the World Geodetic System 1984 Reference Frame. Presented at the Institute of Navigation, ION-GPS-2002, Portland, OR, Sept, 2002.

McCarthy, D (Ed.) *IERS Technical Note 21*. Observatoire de Paris, 1996

Ruiz, J. I.; Arjona, B. Resultados finales de las redes geodésicas establecidas entre Bogotá y Cartago y entre Bogotá y Chiquinquirá. Publicación especial No. 1, primera edición. Instituto Geográfico Militar y Catastral. Bogotá, 1941.

Sánchez, L.; Tremel, H. and Drewes, H. *The Colombian national geocentric reference frame*. IUGG 99 Birmingham. July 18 – 30 , 1999.

Tremel, H.; Sánchez, L. y Drewes, H. *Procesamiento de la red GPS básica de Colombia - Marco Geocéntrico Nacional de Referencia, -MAGNA-*. En: Revista Cartográfica, Instituto Panamericano de Geografía e Historia. No. 73 (7-23). Méjico, 2001.

Torge, W. *Geodesy*. 3<sup>rd</sup> Edition: De Gruyter, Berlin, New York, 2001

### **TIPOS DE COORDENADAS MANEJADOS EN COLOMBIA**

Este trabajo fue realizado en la División de Geodesia de la Subdirección de Geografía y Cartografía del Instituto Geográfico Agustín Codazzi por la ingeniera Laura Sánchez Rodríguez ([lsanchez@igac.gov.co](mailto:lsanchez@igac.gov.co)) en mayo de 2004



© Instituto Geográfico Agustín Codazzi – 2004  
Prohibida la reproducción total o parcial sin la autorización previa del  
Instituto Geográfico Agustín Codazzi.